國立中興大學附屬高級中學 114 學年度第 1 學期　三年級　自然組　數學甲　第二次期中考 試題卷

命題教師：張老師 審題老師：陳老師

班級：____ 座號：____　　姓名____________　　　　試題共　3　頁

備註:請於答案卡(卷)上畫(寫)上正確身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，統一扣該科總成績 5 分。

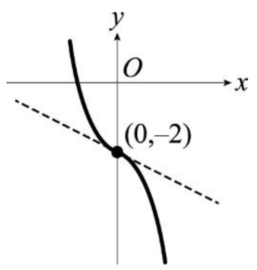
壹、多重選擇題: 36 分

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 3.6 分；答錯 2 個選項者，得 1.2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 設 $f'(x)$表示實係數多項式函數 $f(x)$的導函數，已知 $y=f'(x)$的圖形是一個通過點$(-1,0)$和點$(2,0)$且開口向下的拋物線，試問下列哪些選項是正確的？
(1)$f(x)$是三次多項式函數
(2)$f(x)$在$-1<x<2$ 的範圍內為遞減函數
(3)$f(x)$恰有兩個極值
(4)若 $f(-1)f(2)<0$，則 $f(x)$在區間$(-1,2)$有 3 個實根
(5)若 $f(-1)f(2)>0$，則 $f(x)=0$ 沒有實根

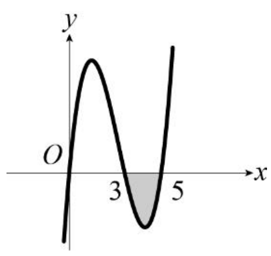
2. 函數$f(x)=x^2$的圖形與直線 $y=0, x=0$ 及 $x=2$ 所圍成的區域面積為 R，將閉區間$[0 , 2]$平分為 n 等分後，設其下和為 L_n，上和為 U_n，下列選項何者正確？
(1)$L_{10}<U_{10}$
(2)$L_{10}>U_5$
(3)$L_{10}<R$
(4)$U_4-L_4<1$
(5)$\lim\limits_{n\to\infty}(U_n-L_n)=0$

3. 如圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，其中點$(0,-2)$為圖形的反曲點，虛線為過反曲點的切線。選出正確的選項。



(1) $a<0$　(2) $b<0$　(3)$c=0$　(4) $d<0$　(5)$b^2-3ac=0$

4. 如圖是多項式函數 $f(x)$的圖形在閉區間$[0 , 5]$與 x 軸所圍成區域，設鋪色部分的面積為 2，且知$\int_0^5 f(x)dx=4$，選出正確的選項：



(1)$\int_3^5 f(x)dx=2$
(2)$\int_0^3 f(x)dx=6$
(3)$\int_3^5 -3f(x)dx=-6$
(4)$\int_0^5 (f(x)+1)dx=10$
(5)函數 $f(x)$圖形在閉區間$[0 , 5]$與 x 軸所圍成區域面積為 8

5. 設函數 $f(x)=-3x^2+108$ 且 $a=\int_0^5 f(x)dx$ ， $b=\sum_{n=0}^{4} f(n)$ ， $c=\sum_{n=1}^{5} f(n)$ ，下列何者為真？

(1)a 表示 $f(x)$的圖形與 x 軸, $x=0$ 及 $x=5$所圍成的區域面積

(2)$a=415$

(3)$b>c$

(4)$b<415$

(5)$c<415$

6. 已知函數 $f(x)=2x^3-3x^2+6x+10$，則下列哪些選項是正確的？

(1)函數 $f(x)$在 $x=1$ 附近的一次估計為 $6x+9$

(2)$f(0.99)$的值四捨五入至小數第二位為 14.94

(3)$y=f(x)$圖形的對稱中心為$(1,15)$

(4)若點(r,s)在 $y=f(x)$的圖形上，則點$(1-r,15-s)$也在 $y=f(x)$的圖形上

(5)函數 $y=f(x)$的圖形與任一水平直線恰有一交點

貳、選填題:55 分

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案畫記在答案卡之所標示的列號（7–28）
2. 第 A 至 I 題：共 11 格，每格完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。
3. 若答案為分數，必須化為最簡分數；若為根式，必須化為最簡根式。並注意分子、分母的列號順序。

A.已知 $f(x)=|x-1|+|x-2|$，求 $\int_0^5 f(x)dx=$ ⑦⑧ 。

B.設函數 $f(x)=2x^3-kx^2+6x+3$ 為嚴格遞增函數，則係數 k 的範圍為$a\le k\le b$，則$a-b=$ ⑨⑩⑪ 。

C.若 a 為實數，多項式方程式$2x^3-9x^2+12x+a=0$有二個相異實根，則 a 的最大值為 ⑫⑬ 。

D.甲、乙兩人參加路跑，跑道上有 A、B 兩休息站。當兩人同時通過 A 站時，甲以速度函數$v(t)=-t^2-2t+16$（公里/小時）減速前行，乙以等速度前行。已知經過 3 小時，兩人又同時通過 B 站。求

(1) A、B 兩休息站距離為 ⑭⑮ （公里）。

(2) 乙的速度為 ⑯⑰ （公里/小時）。

E. 求內接於 $y=-x^2+9$ 與 x 軸所圍成區域的長方形的最大面積為$a\sqrt{b}$ (最簡根式)，則(a，b)=(⑱ ⑲ ，⑳)。

F. 已知多項式 $f(x)$滿足$f(x)=4x^3+3x^2-2x[\int_0^2 f(x)dx]+3$，試求$\int_0^2 f(x)dx=$ ㉑ 。

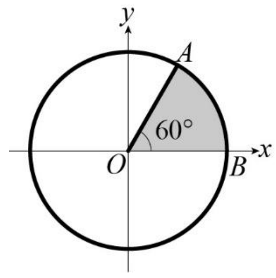
G. 設$F(x)=\int_1^x (8t^5+4t^3-1)dt$，試求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)}{x-1}=$ ㉒ ㉓ 。

H. 已知 a 為正實數，且函數 $f(x)$ 滿足$\int_a^x f(t)dt=x^2-5x-6$，則

(1) $f(1)=$ ㉔ ㉕ 。

(2) $a=$ ㉖ 。

I. 如圖為一圓半徑 6，求鋪色部分(扇形 AOB)繞 x 軸旋轉一圈所得旋轉體體積為 ㉗ ㉘ π。



參、 混合題:9 分

請用 黑色之墨水筆 於「答案卷」上詳列算式過程，未於答案卷上作答者，以零分計算，占 9 分

某縣市的「烏金溪」有段蜿蜒河道，從空拍地圖上建立了坐標系(單位：公里)，發現河川恰好符合一個三次函數 $f(x)=x^3-5x^2+4x$ 。市府計畫在河邊蓋一個步道，從 $P(1,0)$這裡開始，沿著 P 點的河川**切線方向，**開鑿一條筆直的步道。這步道將會在下游的某個點連接河川。試問：

(1) 此項工程中，步道在 $P(1, 0)$點筆直開鑿後，預計會在坐標地圖上的哪一個點連接河川？（請寫出交點坐標）(5 分)

(2)河川與步道之間所夾的空地，政府預計將其改建為一座公園。請問這座公園的面積多少平方公里？ (4 分)

國立中興大學附屬高級中學 114 學年度第 1 學期三年級自然組數學甲第二次期中考 答案卷

命題教師：張老師 審題老師：陳老師

班級：____ 座號：____ 姓名____________ **共___1___頁**

參、 混合題:9 分

(1) 此項工程中，步道在 $P(1, 0)$點筆直開鑿後，預計會在坐標地圖上的哪一個點連接河川？（請寫出交點坐標）(5 分)
(2)河川與步道之間所夾的空地，政府預計將其改建為一座公園。請問這座公園的面積多少平方公里？ (4 分)

解答

壹、多重選擇題

1	2	3	4	5	6
13	135	14	25	1235	125

貳、選填題

A	B	C	D(1)	D(2)	E
15	-12	-4	30	10	(12,3)
F	G	H(1)	H(2)	I	
6	11	-3	6	72π	

參、混合題(9 分)

(1) 求切線方程式：$f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$。

在 $P(1,0)$ 的切線斜率 $m = f'(1) = 3(1)^2 - 10(1) + 4 = -3$。

步道（切線）方程式： $y - 0 = -3(x-1) \Rightarrow y = -3x + 3$。(3 分)

求解交點：$x^3 - 5x^2 + 4x = -3x + 3 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

$(x-1)^2(x-3) = 0$。交點為 $x = 1$（切點）和 $x = 3$（另一交點)。

將 $x = 3$ 代入步道方程式：$y = -3(3) + 3 = -9 + 3 = -6$。(2 分)

答案（1)：(3, -6)

$A = \int_1^3 \left((-3x+3) - (x^3 - 5x^2 + 4x)\right)dx$ (2 分)

$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = \left(\frac{9}{4}\right) - \left(\frac{11}{12}\right) = \frac{27}{12} - \frac{11}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ (2 分)

答案（2) $\frac{4}{3}$ 平方公里