國立中興大學附屬高級中學 114 學年度第 1 學期高三人社班群數學乙— B 期末考

班級:_________　　座號:_____　　姓名:______________　　　　試題共 四 頁

命題老師：Ting　　審題老師：Mr. Chang

第壹部分、選擇（填）題 (占 89 分)

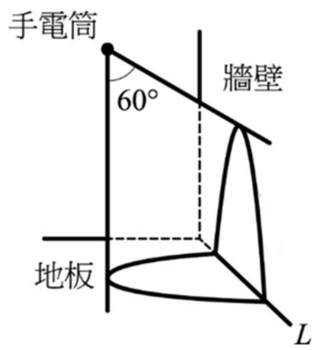
一、單選題(占 15 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 有兩個光點在一條長度為 120 公分的直線形軌道上移動，碰到端點就反向繼續移動。光點 A、光點 B 的移動速率分別為每秒 5 公分及每秒 10 公分。若光點 A，B 分別從軌道的左、右端點出發且相向而動，則兩個光點第四次相遇在距離左端點幾公分處？
(1) 40　(2) 60　(3) 80　(4) 100　(5) 120

2. 若 x、y 為兩正實數，且滿足 $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}=1$ 及 $\frac{1}{3}\log y=2$，則 x 值的範圍為？
(1) $\frac{1}{1000}<x<\frac{1}{100}$　(2) $\frac{1}{100}<x<\frac{1}{10}$　(3) $\frac{1}{10}<x<1$　(4) $1<x<10$　(5) $10<x<100$

3. 已知某手電筒照射的光線為直圓錐狀，且光發散的夾角為 60°，如圖所示。設牆壁與地板垂直且交界處為直線 L，現將此手電筒以垂直於 L 的方向照射，即此直圓錐的軸與 L 垂直，牆壁的光線邊緣為圖形 Γ_1 的一部份，再將手電筒旋轉使得直圓錐的軸與牆壁垂直，得牆壁的光線邊緣為圖形 Γ_2，則圖形 Γ_1 與 Γ_2 分別為何？



(1) Γ_1：雙曲線；Γ_2：圓　(2) Γ_1：雙曲線；Γ_2：橢圓
(3) Γ_1：拋物線；Γ_2：圓　(4) Γ_1：拋物線；Γ_2：橢圓
(5) 無法判斷

二、多選題(占 32 分)

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 一個邊長為 2 的正立方體，將其中心點放在空間坐標 $(1,1,1)$ 上，請問此正立方體與 xy 平面的截痕可能為？
(1) 一點　(2) 正三角形　(3) 梯形　(4) 五邊形　(5) 六邊形

5. 為了瞭解 IQ 和腦容量是否有關，一項小型研究利用核磁共振測量了 5 個人的腦容量（以 10,000 像素為單位），連同他們的 IQ 列表如下：

腦容量 (X)	90	95	a	88	106
IQ(Y)	90	100	112	80	103

已知上表中的 X 之平均值為 $\mu_X = 94$，Y 之平均值為 $\mu_Y = 97$。根據上述表格，下列哪些選項正確？

(1) $a = 91$

(2) 腦容量 (X) 的標準差小於 6

(3) 腦容量 (X) 與 IQ(Y) 的相關係數為 1

(4) 可得到「若腦容量 (X) 越大，則 IQ(Y) 一定越高」的結論

(5) 若分別將腦容量 (X) 與 IQ(Y) 的數據標準化，則兩者標準化後數據的相關係數不變

6. 老師上課時要求同學們將三次函數 $f(x)$ 寫成標準式

$$f(x) = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$$

去看出圖形特徵跟對稱中心，而小明將標準式記錯，因此他將老師給的三次函數改寫為 $f(x) = (x-1)^3 + 6(x-1)^2 - 5$，若小明計算過程無任何錯誤，試問以下哪些選項為真？

(1) $y = f(x)$ 對稱中心為 $(-1, 13)$

(2) $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 的一次近似斜率為 -12

(3) $y = f(x)$ 和 x 軸僅有一個交點

(4) $f(x) = 0$ 恰有一個整數解

(5) 對於所有的實數 t，$f(-3+2t) + f(1-2t) = 11$

7. 在球心為 O 且半徑為 r 的球形地球儀上，有 A、B、C 三個點，其中 A 點在赤道與東經 0° 上；B、C 兩點都在北緯 30° 線上，且經度分別為東經 0°、60°。試選出正確的選項。

(1) 北緯 30° 線的長度為 $\sqrt{3}\pi r$

(2) A 點沿著球面到 B 點的最短弧線長為 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi r$

(3) B 點沿著球面到 C 點的最短弧線長為 $\dfrac{\pi}{3}r$

(4) 「B 點沿著球面到北極點的最短弧線長」等於「C 點沿著球面到北極點的最短弧線長」

(5) C 沿著東經 60° 往南移動抵達 D 點，移動所經過的弧線之長度為 $\dfrac{5}{12}\pi r$，則 D 點位於南緯 45° 線上

三、選填題(占 42 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8-24） 2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。 3. 若答案為分數，皆須化為**最簡分數**；若答案內有根號，皆須化為**最簡根式**。

A. 平面向量 $\overrightarrow{u}$ 和向量 $\overrightarrow{v}$ 互相垂直，且 $\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}=(-3,8)$。若 $\overrightarrow{u}$ 的長度為 5，則 $\overrightarrow{v}$ 的長度為 $\underline{⑧\sqrt{⑨}}$。

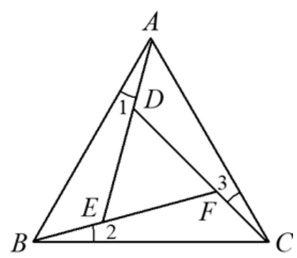
B. 設 $f(x)$ 為一多項式，已知 $f(x)$ 除以 x^3+1 的餘式為 $-x^2+5x-3$，若 $f(x)$ 除以 $3x^2-3x+3$ 的餘式為 $ax+b$，則 $3a+b=$ $\underline{⑩⑪}$。

C. 設各項都是實數的等差數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 之公差為 -7，若 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，則 $b_1,b_2,b_3,\cdots$ 之公差為 $\underline{\dfrac{⑫⑬}{⑭}}$。

D. 某畢業班由 7 位同學負責畢旅規劃，分成「餐飲」、「住宿」、「交通」三個不同組別，且三組分別由 3 人、2 人、2 人組成。7 位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學不能同一組。這 7 位同學總共有 $\underline{⑮⑯⑰}$ 種分組方式。

E. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}^{-1}$，$B=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}^{-1}$，其中 $\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}^{-1}$ 為矩陣 $\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$ 的反方陣。若 $A-B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$ $\underline{⑱⑲}$。

F. 如圖，正 $\triangle ABC$ 的邊長為 1，並且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$。若 $\overline{BE}:\overline{EF}=1:2$，且 $\triangle DEF$ 為正三角形，則 $\triangle DEF$ 面積為 $\underline{\dfrac{\sqrt{⑳}}{㉑㉒}}$。



背面還有選填 G 喔！

G. 某公司舉辦年終抽獎活動，每人從編號分別為 1 至 6 的六張牌中隨機抽取兩張。假設每張牌抽到的機會均相等，且規則如下：

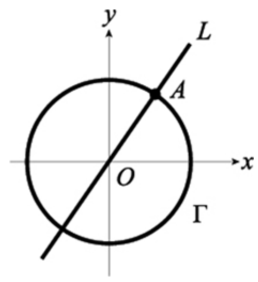
（一）若這兩張牌的號碼之乘積是奇數，則可得獎金 200 元，此時抽獎結束；

（二）若號碼之乘積為偶數，就將這兩張牌丟掉，再從剩下的四張牌中隨機抽取兩張牌，且其號碼之乘積為奇數，則可得獎金 90 元，其他情形則沒有獎金，此時抽獎結束。依上述規則，試求每人參加此抽獎活動的獎金期望值為 <u>㉓㉔</u> 元。

第貳部分、非選擇題 (11 分)

說明：限使用黑色原子筆在標示題號手寫卷內作答。請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分，只寫答案不予計分。

如圖，L 為坐標平面上通過原點 O 的直線，Γ 是以 O 為圓心的圓，且 L 與 Γ 有一個交點 $A(3,4)$。已知 B,C 為 Γ 上的相異兩點滿足 $\overrightarrow{BC}=-\frac{6}{5}\overrightarrow{OA}$，試回答下列問題：



1. 直線 BC 的斜率為 ____________。(填充題，請於手寫卷上回答，2 分)
2. 求 $\overrightarrow{BC}$ 的長度，並求出直線 BC 與直線 L 的距離。(4 分)
3. 承 2，若 C 點在第四象限上，求直線 BC 的方程式。(5 分)

試題結束，請記得檢查，並將答案塗在答案卡上，非選擇題寫於手寫卷上，班級姓名座號標示正確，學測加油！

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$($R$ 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

3. 一維數據 X： $x_1,x_2,\cdots,x_n$

   算術平均數 $\mu_X=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots+(x_n-\mu_X)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{n}\left[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-n\mu_X^2\right]}$

4. 二維數據 (X,Y)： $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$

   相關係數 $r_{X,Y}=\frac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

5. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\sqrt{3}\approx 1.732,\sqrt{5}\approx 2,236,\sqrt{6}\approx 2.449,\pi\approx 3.142$

6. 對數值：$\log 2\approx 0.3010,\log 3\approx 0.4771,\log 5\approx 0.6990,\log 7\approx 0.8451$

選擇題：

1. (1)　　改自 113 學測數 B
2. (2)　　改自 111 學測數 B
3. (3)　　改自 114 學測數 B
4. (2)(3)　　出自 Ting
5. (1)(5)　　改自 109 指考數乙
6. (2)(4)　　改自 Bao
7. (1)(4)(5)　　改自 112 學測數 B

選填題：

A. $2\sqrt{3}$　　改自 106 指考數乙
B. $3\times 4-2=10$　　出自 Ting
C. $\dfrac{-7}{2}$　　改自 108 學測
D. 160　　改自 109 指考數乙
E. $5+(-6)+4+(-5)=-2$　　改自 110 指考數乙
F. $\dfrac{\sqrt{3}}{13}$　　改自 103 學測
G. 58　　改自 110 指考數乙

非選題簡答：1.$\dfrac{4}{3}$　　2.4　　3.$4x-3y=20$

詳解與建議評分：

1. $m_{\overline{BC}}=m_{\overline{OA}}=\dfrac{4}{3}$。

2. 因為 $\overrightarrow{BC}=-\dfrac{6}{5}\overrightarrow{OA}$，所以 $|\overrightarrow{BC}|=\dfrac{6}{5}|\overrightarrow{OA}|=6$(2 分)，因為弦長 $\overline{BC}$ 為 6，所以直線 BC 到 L 距離等於圓心到弦 $\overline{BC}$ 距離 $=\sqrt{5^2-3^2}=4$。(2 分)

3. 令直線 BC 為 $y=\dfrac{4}{3}x+k$(1 分)，得到 $4x-3y+3k=0$，由 2. 知，直線 BC 到 L 距離為 4，即 $d(O,BC)=\dfrac{|0-0+3k|}{5}=4$，得到 $3k=\pm 20$(2 分)，又 C 點在第四象限，所以得到直線 BC 為 $4x-3y=20$(2 分)。