國立中興大學附屬高級中學 113 學年度第 2 學期期末考 高二數 A 測驗卷

班級:__________　　座號:_____　　姓名:_______________　　試題共 四 頁

命題老師：Ting　　審題老師：張老師

選擇（填）題

一、單選題(占 12 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 令 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 及 $A=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}$，$B=I+A+A^{-1}$，試選出代表 $AB-BA$ 的選項。

   (1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix}-5&6\\10&5\end{bmatrix}$

2. 設 $M=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ&-\sin 45^\circ\\\sin 45^\circ&\cos 45^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 120^\circ&\sin 120^\circ\\\sin 120^\circ&-\cos 120^\circ\end{bmatrix}$，若 $M^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，則正整數 n 最小值為何？

   (1) 2　(2) 8　(3) 12　(4) 16　(5) 24

二、多選題(占 40 分)

說明：第 3 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 設 A，B，C 均為二階非零方陣，I_2 為二階單位方陣。下列關於矩陣的敘述哪些正確？

   (1) $A^3A^2=A^2A^3$ 恆成立。

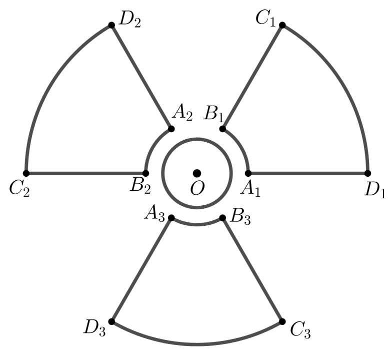
   (2) 若 $AB=I_2$，則 $\det(A)\neq 0$。

   (3) 若 $AB=AC$ 且 $B=C$，則 A^{-1} 存在。

   (4) 若 A 為旋轉矩陣，則存在正整數 n 使得 $A^n=I_2$。

   (5) 若 A 為轉移矩陣且 A^{-1} 存在，則 A^{-1} 可能也為轉移矩陣。

4. 輻射示警標誌中央小圓表示輻射源，三葉表示輻射線。任何有人為輻射的場所，其外圍及大門、入口或會產生輻射的儀器設備表面，都必須張貼這個標誌，以提醒所有的人，要注意輻射的存在及注意自身的安全。阿峰透過 Geogebra 畫出輻射示警標誌 (如圖所示)，其中中央小圓以 $O(0,0)$ 為圓心且半徑為 1，$A_1(1.5,0)$，B_1，A_2，$B_2(-1.5,0)$，A_3，B_3 等六點在以 O 為圓心，半徑為 1.5 之圓上；C_1，$D_1(5,0)$，$C_2(-5,0)$，D_2，C_3，D_3 等六點在以 O 為圓心，半徑為 5 之圓上。除此之外，$\angle D_1OC_1=\angle C_1OD_2=\angle D_2OC_2=\angle C_2OD_3=\angle D_3OC_3=\angle C_3OD_1=60^\circ$，請選出關於這個輻射示警標誌正確的選項。



(1) 點 D_1 經矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 線性變換後為點 C_2。

(2) 點 A_1 經矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 線性變換後為點 B_3。

(3) 劣弧 A_2B_2 經矩陣 $\begin{bmatrix} 3.5 & 0 \\ 0 & 3.5 \end{bmatrix}$ 線性變換後為劣弧 D_2C_2。

(4) 區域 $A_1B_1C_1D_1$ 經矩陣 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 線性變換後為區域 $A_2B_2C_2D_2$。

(5) 輻射示警標誌經矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 線性變換後仍為輻射示警標誌。

5. 設 A 為二階方陣，若 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$，則下列哪些敘述正確？

(1) $A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$。

(2) $A\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$。

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$。

(4) $A^{-1}=A$。

(5) A 為鏡射矩陣。

6. 設 a，b 為實數，下列關於聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ x+ay+bz=0 \end{cases}$ ，則下列哪些敘述正確？

(1) 此聯立方程式必有解。

(2) 若此聯立方程式有無限多解，則 $a=2$ 且 $b=-3$。

(3) 若 $a\neq 2$ 且 $b\neq -3$，則此聯立方程式有唯一解。

(4) 若此聯立方程式有無限多解，則解可表示為 $(-5t,4t,t)$，其中 t 為實數。

(5) 若此聯立方程式有唯一解，則解可能為 $(-5,4,1)$。

7. 某咖啡同好會有數百成員，裡面成員每天一定從甲或乙便利商店中購買精品咖啡 (後面分別以甲咖啡與乙咖啡表示)。經長期調查發現，若當日購買甲咖啡的成員，則隔天會有 20% 改買乙咖啡；若當日購買乙咖啡的成員，則隔天會有 30% 改買甲咖啡。設 x_0、y_0 分別代表今日該同好會購買甲咖啡與乙咖啡人數占同好會成員總人數的比例，其中 x_0，y_0 為正數，且 x_n、y_n 分別代表經過 n 日後購買甲咖啡與乙咖啡人數占同好會成員總人數的比例。令 A_n 為經過 n 日後的轉移矩陣，即 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$，若同好會成員不變動的情形下，試選出正確的選項。

(1) $x_1 = 0.8x_0 + 0.2y_0$。

(2) $A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$。

(3) $A_n = (A_1)^n$。

(4) 若 $\dfrac{x_0}{y_0} = \dfrac{2}{3}$，則 $\dfrac{x_{100}}{y_{100}} = \dfrac{2}{3}$。

(5) 若 $x_0 > y_0$，則對任意正整數 n，$x_n > y_n$ 恆成立。

三、選填題 (占 48 分)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8-31） 2. 第 A 至 D 題，每題完全答對給 7 分；第 E 至 H 題，每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。 3. 若答案為分數，皆須化為**最簡分數**；若答案內有根號，皆須化為**最簡根式**。

A. 設 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，$B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，若 $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d = \underline{⑧⑨}$。

B. 對任意正整數 n，遞迴數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+1} = a_n + pn^2 + qn + r$，其中 p，q，r 為實數。若 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 7$，$a_4 = 18$，則 $p \times q \times r = \underline{⑩⑪}$。

C. 坐標平面上一 $\triangle PQR$，已知 P，Q，R 三點經由矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 線性變換後得到 P'，Q'，R' 三點。若 $\triangle P'Q'R'$ 面積為 8，則 $\triangle PQR$ 面積為 $\underline{\dfrac{⑫⑬}{⑭}}$。

D. 方陣 $\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ 把直線 $2x + y = 3$ 變換到 $x - y = -9$，則數對 $(a, b) = \underline{(⑮⑯, ⑰)}$。

E. 設 x、c 為實數，方陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ x & 5 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$。已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍（其中 $c\neq 0$），則數對 $(x,c)=\underline{(⑱⑲,\dfrac{⑳}{㉑㉒})}$。

F. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 與 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $a_{n+1}=a_n+b_n$ 且 $b_{n+1}=2b_n$(其中 n 為自然數)。已知 $a_1=b_1=16$，若 $a_{100}+b_{100}=2^k$，則整數 $k=\underline{㉓㉔㉕}$。

G. 設矩陣 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$，$C=[c_{ij}]$ 均為五階方陣，其中 $a_{ij}=i-j$，$b_{ij}=\begin{cases} i & 若 i=j \\ 0 & 若 i\neq j \end{cases}$，$c_{ij}=i+j$。若矩陣 $ABC=[d_{ij}]$，則 $d_{34}=\underline{㉖㉗㉘㉙}$。

H. 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為一個二階轉移矩陣，若矩陣 A 滿足 $A^2\begin{bmatrix} t \\ 32 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 60 \\ t' \end{bmatrix}$ 且 $A^4\begin{bmatrix} t \\ 32 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 57 \\ 39 \end{bmatrix}$(其中 t，t' 為實數)，則 $a^2+b^2+c^2+d^2=\underline{\dfrac{㉚}{㉛}}$。

試題結束，請記得檢查班級、姓名、座號畫記正確，並將答案塗在答案卡上

學測備戰開始！

選擇題：

1. (2)　　出自講義 P216 第 13 題 (109 學測)
2. (1)
3. (1)(2)(5)
4. (2)(4)
5. (2)(3)(4)(5)　　出自講義 P205 範例 16
6. (1)(4)　　出自講義 P175 類題 2
7. (3)(5)　　出自講義 P244 第 14 題 (110 指考數甲)

選填題：

A. $-1+6+8+7=20$　　出自講義 P210 第 10 題

B. $1\times 1\times -1=-1$　　出自補教 P67 第 3 題

C. $\dfrac{16}{5}$　　出自講義 P231 範例 11

D. $(-5,2)$　　出自講義 P239 第 14 題

E. $(-2,\dfrac{1}{29})$　　出自講義 P215 第 11 題 (105 指考數乙)

F. 104　　出自補教 P76 第 19 題

G. -100

H. $\dfrac{7}{4}$，其中 $A=\begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$。