國立興大附中 113 學年度第 1 學期第二次定期考查 高三數甲 (304-314)

班級:__________　座號:_____　姓名:_______________　試題共 四 頁，答案卷 一 頁

命題老師：Ting　審題老師：Mr. Lu

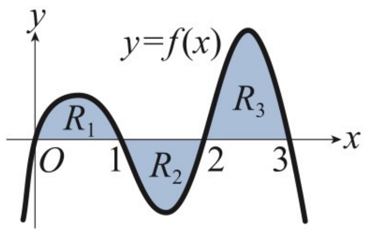
備註：請於答案卡與答案卷上畫上與寫上正確的身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，造成閱卷老師讀卡或閱卷困擾者，統一扣該科總成績 5 分。

第壹部分、選擇（填）題 (合計占 88 分)

一、單選題 (占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 如圖所示，已知 $y=f(x)$ 的圖形和 x 軸交於 $(0,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，$(3,0)$ 四點，且分別與 x 軸所圍的面積 $R_1=3$，$R_2=5$，$R_3=7$，則 $\int_0^3 f(x)dx$ 值為何？



(1) 5　(2) 7　(3) 9　(4) 10　(5) 15

2. 若 $f'(x)=x(x-3)$，則下列敘述何者正確？
(1) $f(0)=0$　(2) $f(2)<f(3)$　(3) $f(x)$的圖形沒有反曲點
(4) $f(x)$的圖形在區間$(2,3)$為凹口向上　(5) $f(x)$的圖形在區間$(1,2)$為凹口向上

3. 設 $f(x)=\int_2^x \sqrt{2t-1}dt$，則 $f'(4)=$？

(1) $2(\sqrt{7}-\sqrt{3})$　(2) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$　(3) $2\sqrt{7}$　(4) $\frac{\sqrt{7}}{2}$　(5) $\sqrt{7}$

4. 設 a 為不為零之實數，若 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{a+2}{2}x^2+2ax+a$ 為三次多項式，則 $y=f(x)$ 圖形 <u>不可能</u> 在下列哪個區間為遞增？
(1) $[-2024,-113]$　(2) $[-113,-8]$　(3) $[-8,-1]$　(4) $[-1,3]$　(5) $[3,10]$

二、多選題(占 24 分)

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 設函數 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=-x^2+1$，並設 R 為函數 $f(x)$ 與函數 $g(x)$ 的圖形與 $x=-1$，$x=1$ 圍成的區域，則下列選項哪些正確？

(1) 積分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\pi$。

(2) 積分 $\int_{-1}^{1} g(x)dx=\frac{4}{3}$

(3) 當 $-1\leq x\leq 1$ 時，$f(x)\geq g(x)$。

(4) 區域 R 的面積為 $\pi-\frac{4}{3}$

(5) 區域 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積為 $\frac{4}{15}\pi$。

6. 設 $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ 為一個四次多項式，其中 a,b,c 為實數，請選出正確的選項。

(1) $f(x)=0$ 必有實數解。

(2) $f'(x)=0$ 必有實數解。

(3) $y=f(x)$ 圖形至少有一個反曲點。

(4) 由 $y=f(x)$ 圖形和 $x=0$、$x=1$ 以及 x 軸所圍出來的區域面積為 $\frac{1}{5}+\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}$。

(5) $\int_{0}^{1}\left|f(x)\right|dx=\left|\frac{1}{5}+\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}\right|$。

7. 設一個三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，其中 a,b,c,d,p,h,k 均為實數，且 $a\neq 0$，則下列選項哪些正確？

(1) $h=\frac{b}{3a}$。

(2) $p=3ah^2+2bh$。

(3) $y=f(x)$ 在點 $(0,d)$ 的切線斜率為 c。

(4) 若 $ap>0$，則 $b^2-3ac<0$。

(5) 若 $b^2-3ac\leq 0$，則 $ap>0$。

三、選填題(占 40 分)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8-28） 2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。 3. 若答案為分數，皆須化為**最簡分數**；若答案內有根號，皆須化為**最簡根式**。

A. 已知多項式 $f(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 5x - 1$ 在 $(\alpha, f(\alpha))$ 及 $(\beta, f(\beta))$ 為 $y = f(x)$ 圖形的反曲點，則 $\alpha + \beta = \underline{⑧}$。

B. 若 $\int_1^3 \left(3x^2 + ax + 1\right)dx = 24$，則實數 $a = \underline{⑨⑩}$。

C. 設三次函數 $f(x) = ax^3 + ax^2 + (a-1)x + 7$ 恆為遞增函數，則實數 a 範圍為 $a \geq \underline{\frac{⑪}{⑫}}$。

D. 設函數 $f(x) = 2x^2$ 的圖形與 x 軸，$x = 0$ 及 $x = 2$ 所圍成的區域為 R，若在區間 $[0, 2]$ 等分成 n 段，並分別在這些等分點上作上矩形，若這些上矩形的總和 (即上和) 為 U_n，則 $U_4 = \underline{\frac{⑬⑭}{⑮}}$。

E. 試求 $\int_0^3 \left(\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x^2\right)dx = \underline{\frac{⑯⑰}{⑱}}$。

F. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x) = -6x + 4$，若 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 有局部極值 3，則 $f(-2) = \underline{⑲⑳}$。

G. 已知 R 為函數 $f(x)=-x^2+2$ 的圖形與 x 軸所圍成的區域，則 R 繞 x 軸所得的旋轉體體積為 $\underline{\dfrac{㉑㉒\sqrt{㉓}}{㉔㉕}\pi}$。

H. 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}\right)^6\left[1^5+2^5+\cdots+n^5\right]=\underline{\dfrac{㉖㉗}{㉘}}$。

第貳部分、計算題 (合計占 12 分)

說明：第貳部分為計算題，限使用黑色原子筆在標示題號答案卷內作答。請由左而右橫式書寫，第二題作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分，第二題只寫答案或未在答案卷上作答者均不予計分。

Bao 在練習學測考古題時，寫到類似題如下：「平面上兩點 A、B 之距離為 6，以 A 為圓心作一半徑為 $r(0<r<6)$ 的圓 Γ，過 B 作圓 Γ 的切線，切點 (之一) 為 P。當 r 變動時，$\triangle PAB$ 的面積最大可能值為何？」

一、請用 r 表示 $\triangle PAB$ 的面積。(不須寫出計算過程或理由，請於答案卷上作答，4 分)

二、承第一題，請用「微分」的方法及「一階 (或二階) 檢定法」求出，當 r 為多少時，$\triangle PAB$ 面積有最大值為何？(必須寫出計算過程或理由，請於答案卷上作答，8 分)

試題結束，請記得檢查，並將答案塗在答案卡上，計算題寫於答案卷上，
班級姓名座號標示正確，祝考試順利。

選擇題：

1. (1)　2. (4)　3. (5)　4. (3)

5. (2)(3)(5)　6. (1)(2)　7. (3)(4)

選填題：

A. 3　B. -1　C. $\dfrac{3}{2}$　D. $\dfrac{15}{2}$

E. $\dfrac{23}{2}$　F. 21　G. $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}\pi$　H. $\dfrac{32}{3}$

計算題：

一、$\triangle PAB$ 面積為 $\dfrac{1}{2}r\sqrt{36-r^2}$

二、當 $r=3\sqrt{2}$ 時，$\triangle PAB$ 面積有最大值為 18。

過程與評分：

(方法一)

1.(3 分) 由第一題知 $\triangle PAB$ 面積為 $\dfrac{1}{2}r\sqrt{36-r^2}$

令 $f(r)=\dfrac{1}{2}r\sqrt{36-r^2}$

則 $f'(r)=\dfrac{1}{2}\sqrt{36-r^2}+\dfrac{1}{2}r\dfrac{-2r}{2\sqrt{36-r^2}}=\dfrac{18-r^2}{\sqrt{36-r^2}}$

2.(3 分)$f'(r)=0$ 解得 $r=\pm3\sqrt{2}$，又 $0<r<6$，可得表格如下：

	0		$3\sqrt{2}$		6
f'		+	-	+	
f	0	↗	18	↘	0

(2-2.)$f''(r)=\dfrac{-2r\sqrt{36-r^2}-(18-r^2)\frac{-r}{\sqrt{36-r^2}}}{36-r^2}$，所以 $f''(3\sqrt{2})=\dfrac{-6\sqrt{2}\times18-0}{18}<0$。

3.(2 分) 故由一階檢定法可知，當 $r=3\sqrt{2}$ 時 (1 分)，$\triangle PAB$ 有最大值 18(1 分)。

(3-2.)(2 分) 故由二階檢定法可知，當 $r=3\sqrt{2}$ 時 (1 分)，$\triangle PAB$ 有最大值 18(1 分)。

(方法二)

1.(3 分) 由第一題知 $\triangle PAB$ 面積為 $\dfrac{1}{2}r\sqrt{36-r^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{36r^2-r^4}$

令 $f(r)=36r^2-r^4$

則 $f'(r)=72r-4r^3$

2.(3 分)$f'(r)=0$ 解得 $r=\pm3\sqrt{2}$ 或 0，又 $0<r<6$，可得表格如下：

	0		$3\sqrt{2}$		6
f'		+	-	+	
f	0	↗	324	↘	0

(2-2.)$f''(r)=72-12r^2<0$，所以 $f''(3\sqrt{2})=72-12\times18<0$。

3.(2 分) 故由一階檢定法可知，當 $r=3\sqrt{2}$ 時 (1 分)，$\triangle PAB$ 有最大值 18(1 分)。

(3-2.)(2 分) 故由二階檢定法可知，當 $r=3\sqrt{2}$ 時 (1 分)，$\triangle PAB$ 有最大值 18(1 分)。