國立興大附中　113 學年度第 1 學期　高三第一次期中考數學甲試題			命題：吳老師 審題：許老師
班級：三年______班	座號：______	姓名：__________________	試題共 3 頁+答案卷 1 張

備註：請於答案卡(卷)上畫(寫)上正確身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，統一扣該科總成績 5 分。

第壹部分：選擇題（占 22 分）

一、單選題（占 12 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 4 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 試求 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-6)^{50}-1}{x-5}=$

（1）100　（2）-100　（3）50　（4）-50　（5）1

2. 試求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+12x}-2x\right)=$

（1）3　（2）2　（3）1　（4）0　（5）不存在

3. 有一無窮等比級數和之收斂值為正數 S，且第二項為 2，則 S 的最小值為何?

（1）$\sqrt{17}$　（2）$\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$　（3）8　（4）6　（5）4

二、多選題（占 10 分）

說明：第 4 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 請問下列哪些選項正確?

(1)無窮數列 $\left\langle \dfrac{(-1)^n\cdot 100}{n}\right\rangle$ 為收斂數列

(2)若無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 及 $\langle b_n\rangle$ 均為收斂數列，且對於任意正整數 n 皆滿足 $a_n<b_n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

(3)若無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 及 $\langle b_n\rangle$ 均為發散數列，則數列 $\langle a_n\times b_n\rangle$ 必為發散

(4)若無窮數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂但 $\langle b_n\rangle$ 發散，則數列 $\langle a_n-b_n\rangle$ 必為發散

(5)對於任意正整數 n，如果 $0\le a_n\le b_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 發散，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也發散

5. 請問下列哪些極限存在?（其中 $[\,x\,]$ 表示高斯函數）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$　（2）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x^2}$　（3）$\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$　（4）$\lim\limits_{x\to 3}(x-[x])$　（5）$\lim\limits_{x\to 3}[\,x-[x]\,]$

第貳部分：選填題（占 72 分）

說明：1.第 A 至 L，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（6-33）。
　　　2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a & ,x\ge 1 \\ bx+1 & ,x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 處連續且可微分，則數對 $(a,b)=$ (⑥,⑦)

B. 求極限值 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|-2x^2+7x-3\right|-2}{x-1}=$ ⑧

C. 設 $f(x)=-x^3+ax^2+bx-15$，若以 $(2,19)$ 為切點的切線斜率最大，則 $a-b=$ ⑨ ⑩

D. 已知函數 $f(x)=\left(\dfrac{3x-5}{x^2-1}\right)^4$，求 $f'(2)=\dfrac{⑪\ ⑫}{⑬\ ⑭\ ⑮}$ （化為最簡分數）

E. 已知 $P(2,1)$ 為二次函數 $f(x)=x^2-3x+4$ 的圖形外一點，已知 L 為通過 P 點且與 $y=f(x)$ 相切的切線，若 L 的斜率為正，則 L 的方程式為 $y=$ ⑯ x+⑰ ⑱

F. 求極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+2n+3n+\cdots+n^2\right)}{\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)}=\dfrac{⑲}{⑳}$ （化為最簡分數）

G. 求極限值 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=\dfrac{㉑}{㉒}$ （化為最簡分數）

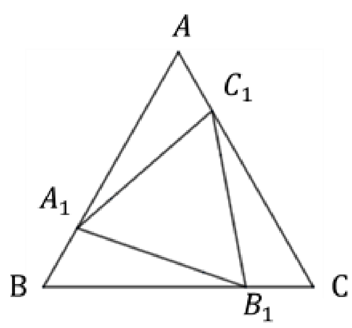
H. 若 k 為正整數，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+7\cdot 3^n+5\cdot 4^n}{3^{n+1}+4^{n+k}}=\dfrac{5}{256}$ ，則 $k=$ ㉓

I. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{n+1}-6^{n-1}}{7^n}=\dfrac{㉔㉕}{㉖}$ （化為最簡分數）

J. 已知 $f'(a)=4$ ，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}=$ ㉗㉘

K. 設 $f(x)$ 為一多項式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-3x^3}{x^2+x-6}=1$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2+x-6}=6$，求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ ㉙㉚㉛

L. 設有一正三角形 ΔABC，依序將三邊以 3:1 分段，再連接各分點得正三角形 $\Delta A_1B_1C_1$；再將新做出的 $\Delta A_1B_1C_1$ 三邊按順序以 3:1 分段，連接各分點得正三角形 $\Delta A_2B_2C_2$；……，依此規則做出無窮多個正三角形。若所有正三角形 ΔABC，$\Delta A_1B_1C_1$，$\Delta A_2B_2C_2$， ……的面積和為 $100\sqrt{3}$ ，則正三角形 ΔABC 之邊長為 ㉜㉝



第叁部分：非選題（占 6 分）

說明：限使用黑色原子筆在標示題號手寫卷內作答。請由左而右橫式書寫， 作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分，只寫答案不予計分。

1. 設 $a_n=\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots+\sqrt{n\times(n+1)}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$ 之值為何?

※ **請於答案卡(卷)上畫(寫)上正確身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，統一扣該科總成績 5 分**

國立興大附中　113 學年度第 1 學期　高三第一次期中考數學甲試題　命題：吳老師 審題：許老師

班級：三年______班　座號：______　姓名：____________________　試題共 3 頁+答案卷 1 張

答案卷

第叁部分：非選題（占 6 分）

說明：限使用黑色原子筆在標示題號手寫卷內作答。請由左而右橫式書寫， 作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分，只寫答案不予計分。

1. 設 $a_n=\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots+\sqrt{n\times(n+1)}$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$ 之值為何?

國立興大附中 113學年度第1學期 高三第一次期中考數學甲試題	命題：吳老師 審題：許老師
班級：三年＿＿＿班 座號：＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿	試題共頁+答案卡1張

解答

第壹部分：選擇題（占22分）

一、單選題（占12分）

1.	2.	3.
4	1	3

二、多選題（占10分）

4.	5.
14	1235

第貳部分：選填題（占72分）

A.	B.	C.	D.	E.
(2, 5)	3	-3	$\frac{20}{243}$	3x-5
F.	**G.**	**H.**	**I.**	**J.**
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{23}{2}$	16
K.	**L.**			
-14	15			

第叁部分：非選題（占6分）

1. 設 $a_n=\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots+\sqrt{n\times(n+1)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 之值為何?

對任意正整數 n，

$n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$ （1分）

故 $1+2+\cdots+n<\sqrt{n(n+1)}<2+3+\cdots+(n+1)$

$\rightarrow \frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ （2分）

因為 $\frac{n(n+1)}{2n^2}<\frac{a_n}{n^2}<\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}=\frac{1}{2}$ （2分）

所以由夾擠定理，

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$ （1分）