

第壹部分、選擇題

一、單選題 (占 30 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

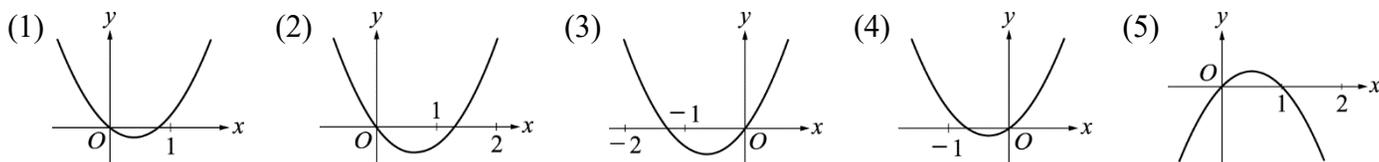
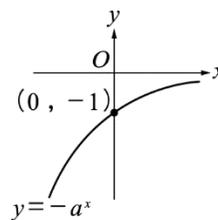
- () 1. 下列何者的圖形可由 $y = \sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位，再向上平移 2 單位後得到？
 (1) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2$ (2) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) - 2$ (3) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 2$ (4) $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$ (5) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2$

- () 2. 點 $A(\sin 5, \cos 5)$ 落在
 (1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限 (4) 第四象限 (5) 坐標軸上。

- () 3. 以下有關 $a = 1.2^{-2.3}$, $b = 1.2^{-1.2}$, $c = 0.1^{-1.2}$ 三數的大小關係，試選出正確的選項。
 (1) $a < c < b$ (2) $b < a < c$ (3) $a < b < c$ (4) $b < c < a$ (5) $c < a < b$ 。

- () 3. 某品牌計算機在計算對數 $\log_a b$ 時需按 $\boxed{\log} \boxed{[a]} \boxed{[b]}$ 。某生在計算 $\log_a b$ 時 (其中 $a > 1$ 且 $b > 1$) 順序弄錯，誤按 $\boxed{\log} \boxed{[b]} \boxed{[a]}$ ，所得為正確值的 $\frac{9}{4}$ 倍。試選出 a, b 間的關係式 (1) $a^2 = b^3$ (2) $a^3 = b^2$ (3) $a^4 = b^9$ (4) $2a = 3b$ (5) $3a = 2b$

- () 4. 若函數 $y = -a^x$ 的圖形如右圖，則 $y = x^2 - ax$ 的函數圖形可能為下列何者？



- () 4. 設等差數列 $\{a_n\}$ 之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 依序也成等差數列。試選出數列 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 的公差 (1) $\log d$ (2) $\log \frac{2}{3}$ (3) $\log \frac{3}{2}$ (4) $\log 2d$ (5) $\log 3d$

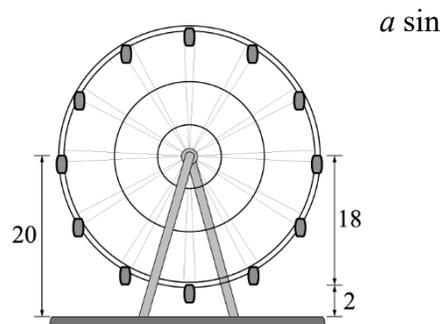
- () 5. 若 $a = \sin(2\pi^2)$ ，則下列何者正確？
 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < -\frac{1}{2}$ (3) $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ 。

二、多選題 (占 16 分)

說明：第 6 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- () 6. 有一圓形摩天輪，中心軸高 20 公尺，直徑 36 公尺，逆時針方向運轉一圈，需 15 分鐘。當摩天輪開始運轉時，阿正恰坐在離地面最近的位置上， x 分鐘後，阿正離地面高度為 $y = (bx + c) + d$, $a > 0, b > 0, 0 < c < 2\pi$ ，下列哪些選項正確？

- (1) $a + d = 36$ (2) $a = 18$ (3) $b = \frac{2\pi}{15}$ (4) $c = \frac{2\pi}{3}$ (5) $d = 18$ 。

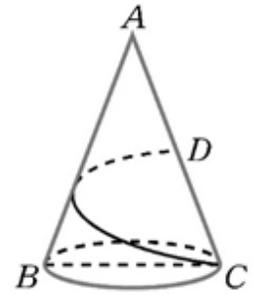


- () 7. 設 $f(x) = \frac{(2^x - 128)(3^x - 1)(6^x + 6)}{(5^x - 125)(2^{-x} - 4)}$ ，若 $f(a) < 0$ ，則 a 可以是下列何數？
 (1) -4 (2) 1 (3) $\sqrt{20}$ (4) $\sqrt{40}$ (5) $\sqrt{60}$

第貳部分、選填題 (占 42 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8-22)。
 2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 如圖，直圓錐頂點為 A ，底直徑 $\overline{BC} = 1$ ，且 $\overline{AB} = 3$ 。若一隻螞蟻由 C 點沿錐面繞一圈到 D 點，其中 A, D, C 共一直線，已知 $\overline{AD} = \frac{3}{2}$ 。則這隻螞蟻所走的最短路徑長度為

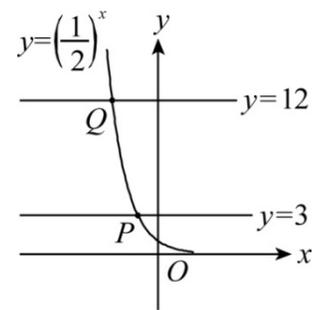


$\frac{\textcircled{8}\sqrt{\textcircled{9}}}{\textcircled{10}}$ 。(最簡根式)

- B. 設 $\pi < x < 2\pi$ ，方程式 $\sin x + \frac{1}{3} = 0$ 的實根為 α, β ，則 $\alpha + \beta = \textcircled{11} \pi$ 。

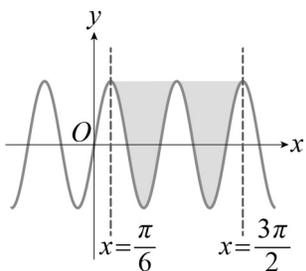
- C. 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 中， $y = \sin x$ 與 $y = \sin 2x$ 的圖形共有 $\textcircled{12}$ 個交點。

- D. 右圖為 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形。設 P, Q 分別為直線 $y = 3, y = 12$ 與

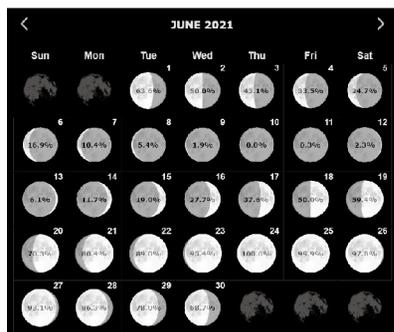


$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的交點，則 \overline{PQ} 的長為 $\sqrt{\textcircled{13} \textcircled{14}}$ 。

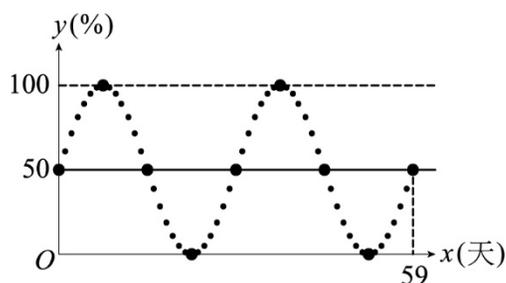
- E. 若 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ，則函數 $y = 2\sin 3x$ 與直線 $y = 2$ 所圍成的灰色封閉區域之面積為 $\frac{\textcircled{15}}{\textcircled{16}} \pi$ 。



F. 月有陰晴圓缺，每天看到的月亮都不太一樣，而且是有規律、週期性地循環，網站上可查到每天可看見月亮表面積的比例，如圖(甲)所示。



(甲)



(乙)

將網站上查到的比例，以時間為 x 軸（天）、可看見月亮表面積的比例為 y 軸（%）繪製在坐標平面上，如圖(乙)所示。

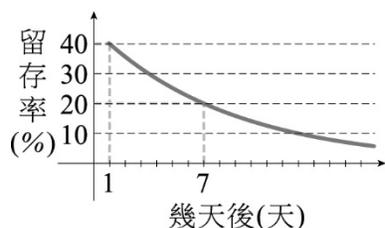
已知可用正弦函數 $y = a \sin(b\pi x) + 50$ 來表示 x 與 y 的關係，則 $(a, b) = (\textcircled{17} \textcircled{18} , \frac{\textcircled{19}}{\textcircled{20} \textcircled{21}})$ 。

G. 試問有多少個實數 x 滿足 $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 且 $\sin x^\circ \leq \sin x$? 答: 22 個。

第參部分、計算題（占 12 分）

說明：請於答案卷上詳列算式過程，未於作答卷上作答者，以零分計算，占 12 分

1. 某款 APP 的新增用戶中，在 x 天後仍啟動該 APP 的人數比例 $r(x)\%$ ，叫做 x 天後留存率，而 $r(x)$ 稱為留存函數。一般而言，留存函數 $r(x)$ 的曲線會快速下降，如圖所示，經常被用來檢驗用戶的活躍程度。



此 APP 的留存函數 $r(x)$ 滿足 $r(1) = 40$ 及 $r(7) = 20$ （即 1 天與 7 天後的留存率為 40% 與 20%），且留存函數 $r(x)$ 符合 $r(x) = \alpha \times 2^{\beta(1-x)}$ 的數學模型，試回答下列問題：

(1) 試求 $r(13)$ 的值。（非選擇題，6 分）

(2) 留存率有個 40-20-10 法則是指：「1 天、7 天及 31 天後的留存率都不得低於 40%、20% 及 10%」。試判斷該款 APP 是否符合 40-20-10 法則？請說明理由。（非選擇題，6 分）

1. 國際上使用芮氏規模來表示地震的強度。設 $E(M)$ （單位：爾格）為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量， M 與 $E(M)$ 的關係如下：

$$\log_{10} E(M) = 11.8 + 1.5M。$$

某次地震其芮氏規模為 4，試問：

(1) 其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少？

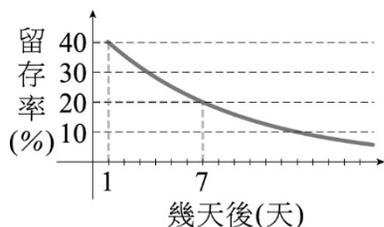
(2) 如果芮氏規模 a 的地震所釋放之能量是芮氏規模 4 的 1000 倍，則 a 大約是多少？

計算題答案卷

第叁部分、計算題（占 12 分）

說明：請於答案卷上詳列算式過程，未於作答卷上作答者，以零分計算，占 12 分

1. 某款 APP 的新增用戶中，在 x 天後仍啟動該 App 的人數比例 $r(x)\%$ ，叫做 x 天後留存率，而 $r(x)$ 稱為留存函數。一般而言，留存函數 $r(x)$ 的曲線會快速下降，如圖所示，經常被用來檢驗用戶的活躍程度。



此 APP 的留存函數 $r(x)$ 滿足 $r(1) = 40$ 及 $r(7) = 20$ （即 1 天與 7 天後的留存率為 40% 與 20%），且留存函數 $r(x)$ 符合 $r(x) = a \times 2^{\beta(1-x)}$ 的數學模型，試回答下列問題：

- (1) 試求 $r(19)$ 的值。（非選擇題，6 分）
 - (2) 留存率有個 40-20-10 法則是指：「1 天、7 天及 31 天後的留存率都不得低於 40%、20% 及 10%」。試判斷該款 APP 是否符合 40-20-10 法則？請說明理由。（非選擇題，6 分）
1. 國際上使用芮氏規模來表示地震的強度。設 $E(M)$ （單位：爾格）為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量， M 與 $E(M)$ 的關係如下：

$$\log_{10}E(M) = 11.8 + 1.5M。$$

某次地震其芮氏規模為 4，試問：

- (1) 其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少？
- (2) 如果芮氏規模 a 的地震所釋放之能量是芮氏規模 4 的 1000 倍，則 a 大約是多少？

解答

第壹部分、選擇題

一、單選題（占 30 分） 1.(5) 2.(2) 3.(3), (1) 4.(1),(3) 5. (4)

二、多選題（占 16 分） 6.(2)(3) 7.(1)(2)(5)送分

第貳部分、選填題（占 42 分）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. 3 C. 5 D. $\sqrt{85}$

E. $\frac{8}{3}$ F. $(50, \frac{4}{59})$ G. 0

第參部分、計算題（占 12 分）

(1)5 (2)否

(1) 將 $r(1) = 40$ 及 $r(7) = 20$ 代入數學模型，得

$$\begin{cases} r(1) = \alpha \times 2^{\beta(1-1)} = 40 \\ r(7) = \alpha \times 2^{\beta(1-7)} = 20 \end{cases} \quad (1\text{分}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 40 \\ 40 \times 2^{\beta(1-7)} = 20 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 40, \beta = \frac{1}{6} \quad (2\text{分})。$$

因為 $r(x) = 40 \times 2^{\frac{1}{6}(1-x)}$ ，所以 $r(19) = 40 \times 2^{\frac{1}{6}(1-19)} = 40 \times 2^{-3} = 5$ 。(3 分)

(2) 根據題意，40-20-10 法則的前兩個已經滿足 (2 分)

$r(1) = 40$ 及 $r(7) = 20$ (即 1 天與 7 天後的留存率為 40%與 20%)

，現在檢驗第三個，

$$\text{計算得 } r(31) = 40 \times 2^{\frac{1}{6}(1-31)} = 40 \times 2^{-5} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4} < 10。(4\text{分})$$

因為第三個條件不成立，所以不符合 40-20-10 法則。

1. 國際上使用芮氏規模來表示地震的強度。設 $E(M)$ (單位：爾格) 為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量， M 與 $E(M)$ 的關係如下：

$$\log_{10}E(M) = 11.8 + 1.5M。$$

某次地震其芮氏規模為 4，試問：

(1) 其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為多少？

(2) 如果芮氏規模 a 的地震所釋放之能量是芮氏規模 4 的 1000 倍，則 a 大約是多少？

(1) $10^{17.8}$ 爾格 (2)6

(1) 因為 $\log_{10}E(4) = 11.8 + 1.5 \times 4 = 17.8$ ，(3 分)

所以 $E(4) = 10^{17.8}$ (爾格)。(3 分)

(2) 因為 $E(a) = 1000 \times E(4)$ ，所以

$$\log_{10}E(a) = \log_{10}(1000 \times E(4)) = \log_{10}1000 + \log_{10}E(4) = 3 + \log_{10}E(4)。(3\text{分})$$

因此， $11.8 + 1.5a = 3 + 11.8 + 1.5 \times 4$ ，解得 $a = 6$ 。(3 分)