國立中興大學附屬高級中學 113 學年度第 1 學期第一次定期考查 高二數 A

班級:__________ 座號:_____ 姓名:_______________ 試題共 四 頁，答案卷 一 頁

命題老師：Ting 審題老師：Yang

備註：請於答案卡與答案卷上畫上與寫上正確的身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，造成閱卷老師讀卡或閱卷困擾者，統一扣該科總成績 5 分。

第壹部分、選擇（填）題 (合計占 88 分)

一、單選題 (占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 試問方程式 $|\sin 2x| = \dfrac{x}{2\pi}$ 有多少個實根？

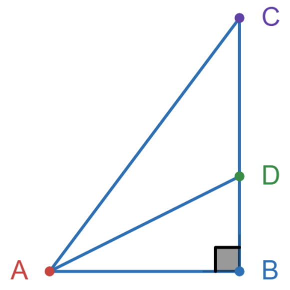
(1) 5個 (2) 6個 (3) 7個 (4) 8個 (5) 9個

2. 下列各選項中，哪一個值最大？

(1) $\sin 1\cos 2 - \cos 1\sin 2$ (2) $\sin 1 + \cos 1$ (3) $\dfrac{\tan 1 + \tan 2}{1 - \tan 1\tan 2}$

(4) $\cos 1\cos 2 - \sin 1\sin 2$ (5) $1 - 2\sin^2 1$

3. 如圖直角三角形 ABC 中，$\angle B = 90^\circ$，$\overline{AB} = 2$，$\overline{BD} = 1$，若 $\angle BAC$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則 $\overline{CD}$ 長為多少？



(1) $\dfrac{4}{3}$ (2) $\dfrac{5}{3}$ (3) $\dfrac{11}{9}$ (4) $\dfrac{13}{9}$ (5) $\dfrac{14}{9}$

4. 已知 $P(\sin 1, -\cos 1)$、$Q(\cos 4, \sin 4)$ 為單位圓上兩點，O 為原點 (極點)，若扇形圓心角 $\angle POQ \in (0, \pi)$，則扇形 POQ 面積為

(1) $\dfrac{3}{2}$ (2) $\dfrac{3\pi}{2} - 3$ (3) $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{3}{2}$ (4) $\dfrac{5\pi}{2} - 5$ (5) $\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{5}{2}$

二、多選題(占 24 分)

> 說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 與 $\angle B$ 均為銳角，且 $\sin A = \dfrac{3}{5}$，$\sin B = \dfrac{7}{25}$，$\overline{AB} = 4$，則下列敘述哪些正確？

(1) $\cos C = -\dfrac{3}{5}$。

(2) $\cos C = \dfrac{4}{5}$。

(3) $\triangle ABC$ 為銳角三角形。

(4) $\overline{AC} > 2$。

(5) $\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{42}{25}$。

6. 考慮函數 $f(x) = \sqrt{3}\sin\dfrac{1}{2}x - 3\cos\dfrac{1}{2}x$，選出下列正確的敘述。

(1) $-2\sqrt{3} \le f(x) \le 2\sqrt{3}$。

(2) 函數 $f(x)$ 的週期與函數 $y = \tan x$ 的週期相同。

(3) $f(2) < 0$。

(4) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$。

(5) 存在實數 α 使得 $f(\alpha) + \alpha^2 = 0$。

7. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 2\angle A$，$\overline{BC} = 4$，則下列選項哪些正確？(已知 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$)

(1) 線段 $\overline{AC}$ 長可能為 8。

(2) 線段 $\overline{AC}$ 長可能為 6。

(3) 線段 $\overline{AB}$ 長為 $8\cos^2 A - 2$。

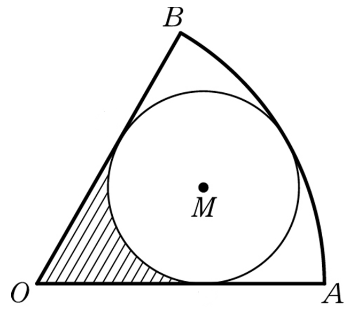
(4) 若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，則 $\dfrac{\pi}{6} < \angle A < \dfrac{\pi}{3}$。

(5) 若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，則 $\triangle ABC$ 周長的最大值為 $12 + 4\sqrt{3}$。

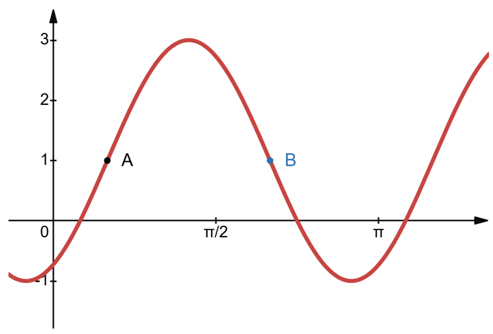
三、選填題(占 40 分)

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8-30） 2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。 3. 若答案為分數，皆須化為**最簡分數**；若答案內有根號，皆須化為**最簡根式**。

A. 一扇形 OAB 的圓心角為 $\frac{\pi}{3}$，半徑為 9，若有一圓心為 M 之內切圓 (如圖)，則其斜線部分的面積為 $\underline{⑧\sqrt{⑨}-⑩\pi}$。



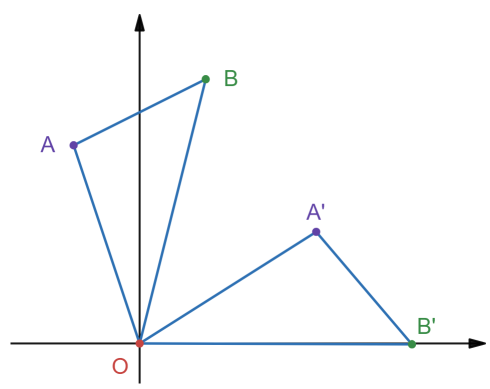
B. 右圖為函數 $y=f(x)=2\sin(bx-c)+1$ 的部分圖形，其中實數 $b>0$，$0<c<\frac{\pi}{2}$，且圖形上 A、B 兩點坐標分別為 $(\frac{\pi}{6},1)$ 與 $(\frac{2\pi}{3},1)$。Bao 上課說：「若將 $y=2\sin x+1$ 圖形先經由水平伸縮 $\frac{1}{b}$ 倍，再向右平移 h 單位後，就會和 $y=f(x)$ 圖形重合。」但 Ting 因手機震動分神沒聽清楚，請幫他寫出數對 $(b,h)=\underline{\left(⑪,\frac{⑫}{⑬}\pi\right)}$。(請化為最簡分數)



C. 已知 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}$，若當 $x=\theta$ 時，函數 $f(x)=\cos\frac{\pi}{5}\sin x+\cos\frac{3\pi}{10}\cos x$ 有最大值，則 $\theta=\underline{\frac{⑭}{⑮⑯}\pi}$。(請化為最簡分數)

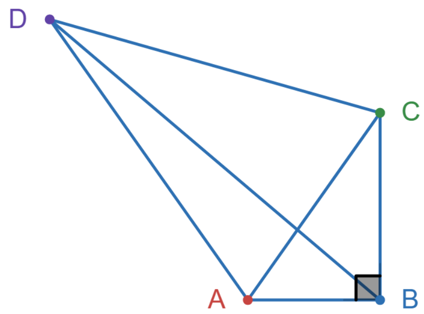
D. 若 $270^\circ<\theta<360^\circ$，且 $4\sin^2\theta-5\cos\theta+2=0$，則 $\cos\frac{\theta}{2}=\underline{\frac{⑰\sqrt{⑱⑲}}{⑳}}$。

E. 如圖，坐標平面上 $\triangle OAB$ 中，O 為原點，兩邊 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 的斜率分別為 -3 與 4。現以 O 為中心，將 $\triangle OAB$ 順時針旋轉得到 $\triangle OA'B'$，若 B' 點落在 x 軸上，則 $\overline{OA'}$ 的斜率為 $\underline{\frac{㉑}{㉒㉓}}$。

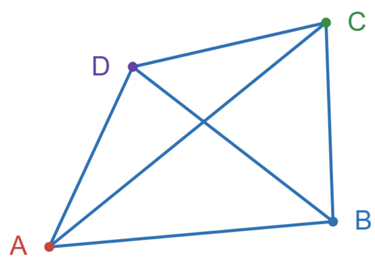


F. 設 $180^\circ < \theta < 270^\circ$，若 $\sqrt{1+\sin 200^\circ} - \sqrt{1-\sin 200^\circ} = 2\cos\theta$，則 $\theta = \underline{㉔㉕㉖}^\circ$。

G. 如圖，一個凸四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=2\sqrt{2}$，$\overline{CD}=\overline{DA}=3\sqrt{3}$，$\angle ABC = 90^\circ$，若 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 為對角線，則 $\overline{BD} = \underline{\sqrt{㉗㉘}}$。



H. 如圖，已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=4$，對角線 $\overline{AC}=8$，若 $\angle BAD = 60^\circ$，則四邊形 $ABCD$ 面積的最大值為 $\underline{㉙\sqrt{㉚}}$。



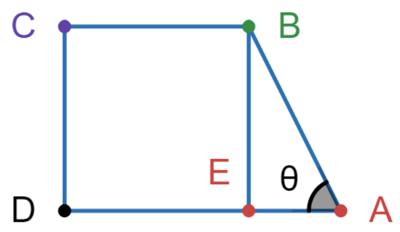
第貳部分、混合題 (合計占 12 分)

說明：第貳部分為題組，第一題為單選題，請將答案畫記在答案卡之所標示的列號 (31)(不需要計算過程)；第二題限使用黑色原子筆在標示題號答案卷內作答。請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分，只寫答案或未在答案卷上作答者均不予計分。

<u>㉛</u> 一、直角三角形 ABE 中，$\angle BEA = 90^\circ$，現以 $\overline{BE}$ 為邊做一正方形 $BCDE$，形成四邊形 $ABCD$(如圖所示)。若 $\overline{AB}=2$，$\angle BAE = \theta$，則四邊形 $ABCD$ 面積可表示為哪個選項？(**<u>請於答案卡上劃記答案</u>**)(4 分)

(1) $2\sin^2\theta\cos^2\theta$　(2) $4\sin^2\theta\cos^2\theta$　(3) $4\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta$

(4) $2\sin\theta\cos\theta + 4\sin^2\theta$　(5) $2\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta$



二、利用第一題之結果，當 θ 變動時 $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$，試求四邊形 $ABCD$ 面積的最大值。並求當面積最大時，此時 $\sin 2\theta$ 的值為多少？(**<u>請於答案卷方框內做答</u>**)(8 分)

試題結束，請記得檢查，並將答案塗在答案卡上，非選擇題寫於答案卷上，
班級姓名座號標示正確，祝考試順利。

選擇題：

1. (4)　出自講義 P26 第 19 題
2. (2)　出自講義 P44 第 9 題
3. (2)　出自補教 P11 第 4 題
4. (3)　改編自補教 P6 第 19 題
5. (1)(5)　出自補教 P13 第 10 題 + 第 11 題
6. (1)(3)(5)　出自補教 P15 第 17 題 + 第 18 題
7. (2)(4)

選填題：

A. $9\sqrt{3}-3\pi$　出自補教 P3 第 5 題

B. $(2,\frac{1}{6}\pi)$　出自講義 P26 第 21 題

C. $\frac{3}{10}\pi$

D. $\frac{-\sqrt{14}}{4}$　出自講義 P35-36 範例 10+11

E. $\frac{7}{11}$

F. 260　出自補教 P12 第 8 題

G. $\sqrt{43}$

H. $8\sqrt{7}$

混合題：

一、(4)

二、面積最大值為 $\sqrt{5}+2$，此時 $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

過程與評分：

1. 由第一題知 $ABCD$ 面積為 $2\sin\theta\cos\theta+4\sin^2\theta$，代入二倍角與半角公式得

$$\sin 2\theta+4\times\frac{1-\cos 2\theta}{2}=\sin 2\theta-2\cos 2\theta+2$$。(2 分)

2. 經由疊合可化簡為 $\sqrt{5}\sin(2\theta-\phi)+2$(2 分)，其中 $\sin\phi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\phi=\frac{\sqrt{5}}{5}$(1 分，至少寫出 sin 或 cos 值)
3. 所以當 $\sin(2\theta-\phi)=1$ 時，面積有最大值 $\sqrt{5}+2$(1 分)
4. 此時 $\sin 2\theta=\sin(\frac{\pi}{2}+\phi)=\cos\phi=\frac{\sqrt{5}}{5}$。(2 分)