

班級：二年_____班 座號：_____ 姓名：_____

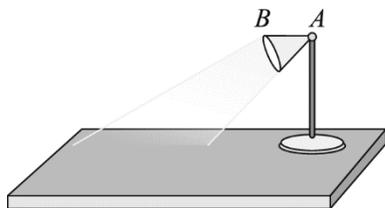
第壹部分：選擇題（占 40 分）

一、單選題（占 8 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題有多個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 4 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

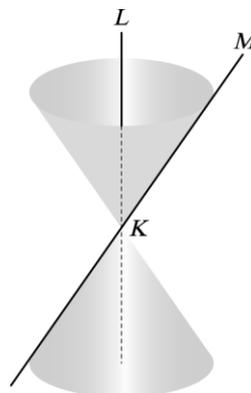
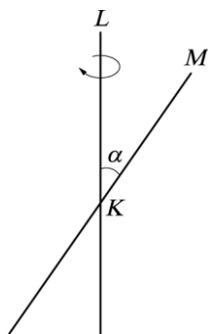
1. 如附圖是一盞桌上的檯燈，已知其照射的燈光形成直圓錐狀，其直圓錐的上緣 \overline{AB} 與桌面平行，求燈光在桌面上照亮區域所形成的邊界是哪個圓錐曲線的一部分？

- (1) 圓 (2) 橢圓 (3) 拋物線 (4) 雙曲線 (5) 直線



2. 設 L 與 M 為交於一點 K 且夾銳角 α 的兩直線，如下左圖，將 L 固定， M 繞 L 旋轉一周，則直線 M 旋轉所掃出的曲面稱為一個直圓錐面，如下右圖。設平面 E 不過直圓錐面的頂點 K ，當平面 E 與直線 L 的銳夾角大於 α 時，則截痕為何？

- (1) 圓 (2) 橢圓 (3) 拋物線 (4) 雙曲線 (5) 直線



二、多選題（占 32 分）

說明：第 3 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 已知 t 為實數， A 、 B 、 C 皆為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零方陣，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $AB = AC$ 且 $A \neq O$ ，則 $B = C$ (2) 若 A^{-1} 存在且 $AB = C$ ，則 $B = CA^{-1}$
 (3) 若 A^{-1} 、 B^{-1} 存在，則 $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (4) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$
 (5) $(tA)(B + C) = A(tB + tC)$

4. 設 x 為任意實數，下列哪一個選項中的方陣**必定**存在乘法反方陣？

- (1) $\begin{bmatrix} 2024 & 2023 \\ 4048 & 4046 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} x & 3 \\ -2 & 2x \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ -5 & x+3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} \sin x & 5 \\ 2 & \cos x \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} \log x & 4 \\ 50 & 2 \end{bmatrix}$

5. 已知 A 、 B 、 C 皆為二階方陣， I 為二階單位方陣， O 為二階零方陣，且 $A+B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ，

$A-B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1) $B-A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

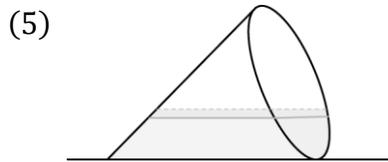
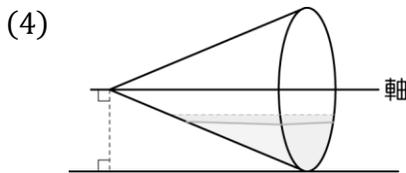
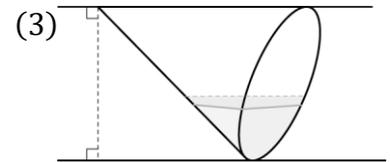
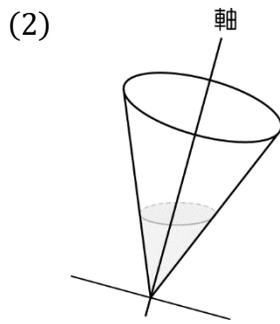
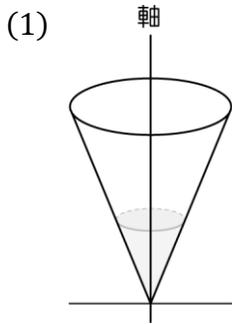
(2) $AB = BA$

(3) 若 $AC = I$ ，則 $C = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(4) 若 $AC = O$ ，則 $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

6. 一密閉圓錐形容器內裝有少於一半的水，今將容器依不同角度放置於平面上，則水面與容器截痕的曲線中，下列哪些選項是拋物線？



第貳部分：選填題（占 60 分）

說明：1.第 A 至 L 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（7-44）2.第 A 題到第 L 題答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。（若答案為分數，請化為最簡分數；若答案為根式，請化至最簡）

A. 已知矩陣 $A = [a_{mn}]_{2 \times 3}$ ，其中 $a_{mn} = m^2 - n$ ，得 $A = \begin{bmatrix} a & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix}$ 。則五數積 $pqrst = \underline{\textcircled{7} \textcircled{8}}$ 。

B. 已知實數 a 、 b 、 x 、 y 滿足 $\begin{bmatrix} 2a+b+3 & ax-5 \\ 5a-2b-1 & 3bx+3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a-b-1 & 3-by \\ 3a+b+2 & 2-2ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ，則數對 $(x, y) = \underline{\textcircled{9}, \textcircled{10} \textcircled{11}}$ 。

C. 已知直線 L 上兩點 $P(6, -1)$ 與 $Q(-3, 8)$ ，透過矩陣 A 會對應到一條新的直線 L' 。已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ，則直線 L' 的方程式為 $\underline{\textcircled{12} x + y = \textcircled{13} \textcircled{14}}$ 。

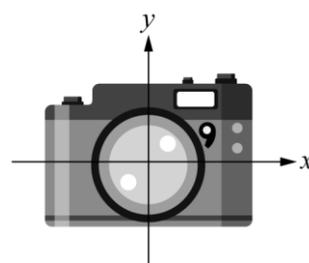
D. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ，若矩陣 $P = \begin{bmatrix} x & q & z \\ p & y & r \end{bmatrix}$ 滿足 $2A + 3B = 2P - 4C$ ，則數對 $(x, y, z) = \underline{\textcircled{15}, \textcircled{16}, \textcircled{17} \textcircled{18}}$ 。

E. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix}$, 若 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 則 $(x-y)^3 = \underline{\textcircled{19} \textcircled{20} \textcircled{21}}$ 。

F. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$, 滿足 $A \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 則四數和 $p+q+r+s = \underline{\textcircled{22} \textcircled{23}}$ 。

G. 設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 滿足 $A^5 = \begin{bmatrix} 34 & 55 \\ 55 & 89 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, 則實數對 $(a, b, c, d) = \underline{(\textcircled{24}, \textcircled{25}, \textcircled{26}, \textcircled{27})}$ 。

H. 設相機內建一個二階方陣 A 。位置 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 因為手震會變成 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, 已知 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 手震後變成 $\begin{bmatrix} 84 \\ 70 \end{bmatrix}$, 而三個參考點 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ 手震後分別變成 $\begin{bmatrix} 44 \\ 53 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 69 \\ 68 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 64 \\ 58 \end{bmatrix}$ 。由上述的資訊計算出原始位置 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 則實數 $x = \underline{\textcircled{28}}$, $y = \underline{\textcircled{29}}$ 。



I. 設 $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$, 滿足 $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$, 則實數 $x = \underline{\textcircled{30} \textcircled{31} \textcircled{32}}$ 。

J. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, I 為二階單位方陣, 滿足 $A^2 = rA - sI$, 則實數對 $(r, s) = \underline{(\textcircled{33}, \textcircled{34})}$ 。

K. 承上題, 若矩陣 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 滿足 $P = A^4 - 8A^3 + 11A^2 - 15A + 6I$, 則實數對 $(a, b, c, d) = \underline{(\textcircled{35}, \textcircled{36}, \textcircled{37}, \textcircled{38})}$ 。

L. 設 $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, I 為二階單位方陣, 若 $\left(\frac{1}{2}K + I\right)^{10} = xK + yI$, 則實數 $x = \frac{\textcircled{39} \textcircled{40} \textcircled{41} \textcircled{42}}{\textcircled{43}}$, $y = \underline{\textcircled{44}}$ 。
(化為最簡分數)

< 試題結束, 請記得檢查, 並將答案塗在答案卡上, 祝考試順利 >

參考答案 敬請指正

單選題

1. 3	2. 2
-------------	-------------

多選題

3. 5	4. 2 3 4	5. 1 4	6. 3 5
-------------	-----------------	---------------	---------------

填充題

A. 12	B. (3, -2)	C. $5x + y = 40$	D. (6, 3, -7)
E. -27	F. -3	G. (1, 1, 1, 2)	H. (4, 5)
I. 968	J. (7, 2)	K. (5, 2, 5, 6)	L. $(\frac{1023}{2}, 1)$