國立中興大學附屬高級中學　112 學年度　第一學期第一次期中考　高三數甲試題

命題教師：Derek 審題教師：Ting

班級：三年_____班 座號：__________ 姓名：_______________ 試題共三頁，答案卡一張，答案卷一張

※答案卡請用 2B 鉛筆畫記，答案卷請用黑色或藍色原子筆作答，若資料遺漏導致無法判讀或批閱將扣成績五分

第一部分：多重選擇題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 下列關於極限與導數的敘述哪些是正確的？

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=0$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=0$　(3) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(4) 若 $f(x)=x|x|$，則 $f'(0)=0$　(5) 若 $f(x)=[x]$，則 $f'(\sqrt{2})=0$

2. 下列關於數列的敘述哪些是正確的？

(1) 若 $<a_n>$ 為收斂數列，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 為收斂

(2) 數列 $<a_n>$ 中，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=r$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=r$

(3) 數列 $<a_n>$，其中 $a_n=r^n$，若 $|r|<1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 為收斂

(4) $\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$，且 e 為無理數，滿足 $2<e<3$

(5) 三數列 $<a_n>$、$<b_n>$、$<c_n>$，其關係為 $a_n\le b_n\le c_n$。
若 $<a_n>$ 及 $<c_n>$ 均為收斂數列，則 $<b_n>$ 必為收斂數列

3. 下列關於函數的敘述哪些是正確的？

(1) $y=|\sin x|+|\cos x|$ 、 $y=3^{-|x|}$ 、 $y=x^4+x^2+2$ ，以上三個函數皆為偶函數

(2) $y=10^x$ 以及 $y=\log x$ 兩函數互為反函數

(3) 若函數滿足 $f(1)=3$，$f(2)=5$，則存在 $1<p<2$ 使得 $f(p)=4$

(4) 三實數 a、b、c，設三次多項方程式 $f(x)$ 且滿足 $f(c)=0$ ，若 $a<c<b$，則 $f(a)\times f(b)<0$

(5) 若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 滿足 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$，則 $f'(a)$ 存在

第二部分：選填題（占 65 分）

說明：1.第 A 至 M 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（4－43）
2.每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\alpha$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{6^n}=\beta$，則 $\alpha+\beta=\dfrac{④}{⑤}$ 。(化為最簡分數)

B. 設無窮等比級數 $S_n = 0.\overline{1} + 0.\overline{03} + \cdots$，則此級數和為 $\dfrac{⑥\ ⑦}{⑧\ ⑨}$ 。(化為最簡分數)

C. 求極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 4^{n-1}}{3 \cdot 2^{n+1} - 4 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 4^{n+1}} = \dfrac{⑩\ ⑪}{⑫\ ⑬}$ 。(化為最簡分數)

D. 設 a、b 為實數，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n}{n+1} + \dfrac{an^2+bn}{n+2}\right) = 4$ ，則數對 $(a,b) =$ (⑭ ⑮ , ⑯) 。

E. 設 $f(x)$ 為三次函數且 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{x+1} = -6$，$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = -3$，則 $f(3) =$ ⑰ ⑱ 。

F. 若 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-ax-12}{x^2-(3+b)x+3b} = -\dfrac{7}{2}$，則數對 $(a,b) =$ (⑲ ⑳ , ㉑) 。

G. 求極限值 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{x}}-2}{x-4} = \dfrac{㉒}{㉓\ ㉔}$ 。(化為最簡分數)

H. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(1) = 1$，$f'(1) = 5$，則 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x^3)-f(1)}{x-1} =$ ㉕ ㉖ 。

I. 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \geq 2 \\ x^3, & x < 2 \end{cases}$，若 $f'(2)$ 存在，則數對 $(a,b) =$ (㉗ , ㉘ ㉙ ㉚) 。

J. 三次函數 $y=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$，若函數圖形上以 $(3,-3)$ 為切點的切線，其切線斜率最小，且此切線通過原點，則數對 $(a,b,c)=$ (㉛ ㉜ , ㉝ , ㉞ ㉟) 。

K. 函數 $f(x)=\frac{3x}{\cos x}$，則 $f'(0)=$ ㊱ 。

L. 若取 $\sqrt{7}$ 的近似值 $a_0=3$，利用牛頓法及 a_0，求出 $\sqrt{7}$ 的下一個近似值為 a_1，再利用牛頓法及 a_1，求出 $\sqrt{7}$ 的下一個近似值為 a_2，則 $a_2=\frac{㊲㊳㊴}{㊵㊶}$ 。(化為最簡分數)

M. 若 $a_n=\sqrt{1+2+3+\cdots+(n+1)}-\sqrt{1+2+3+\cdots+n}$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt{㊷}}{㊸}$ 。(化為最簡根式)

第三部分：混合題（占 11 分）

說明：1.第 1 題，答對得 3 分，請將答案畫記在答案卡之所標示的列號（44）。
2.第 2 題，答對得 3 分，請將答案畫記在答案卡之所標示的列號（45–46）。
3.第 3 題，答對得 5 分，請將過程及答案書寫在答案卷上，未在答案卷上作答者不予計分。

設等比級數 $S_n=a+\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\frac{a}{r^3}+\cdots+\frac{a}{r^{n-1}}$，其中 a、r 為任意實數。（ $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$ ）

1. 當 r 為下列哪個選項時，會使得 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在。(多選題，全對才給分)

(1) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ (2) $\sin 75°\cos 75°$ (3) $\log 0.2$ (4) $\log_{2023}2022$ (5) $\log_2 0.1$

2. 若 $a=9$，$r=4$，則 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，其中 $S=$ ㊺ ㊻ 。(選填題)

3. 承上題，若要使不等式 $|S-S_n|<10^{-8}$ 成立，則最小正整數 n 為多少？(計算題)

＜試題結束，請記得檢查，並將答案作答在答案卡/卷上，祝考試順利＞

國立中興大學附屬高級中學 112 學年度第一學期第一次期中考 高三數甲答案卷

班級：三年____班　　座號：________　　姓名：____________________　　　　計算題得分：________

第三部分：混合題（占 11 分）

說明：1.第 1 題，答對得 3 分，請將答案畫記在答案卡之所標示的列號（44）。
　　　2.第 2 題，答對得 3 分，請將答案畫記在答案卡之所標示的列號（45–46）。
　　　3.第 3 題，答對得 5 分，請將過程及答案書寫在答案卷上，未在答案卷上作答者不予計分。

設等比級數 $S_n = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \cdots + \frac{a}{r^{n-1}}$，其中 a、r 為任意實數。

（ $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$ ）

4. 當 r 為下列哪個選項時，會使得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。(多選題，全對才給分)

(1) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$　(2) $\sin 75° \cos 75°$　(3) $\log 0.2$　(4) $\log_{2023} 2022$　(5) $\log_2 0.1$

5. 若 $a = 9$，$r = 4$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，其中 $S =$ ㊺㊻ 。(選填題)

6. 承上題，若要使不等式 $|S - S_n| < 10^{-8}$ 成立，則最小正整數 n 為多少？(計算題)

請使用黑色或藍色原子筆作答於框內

國立中興大學附屬高級中學　112學年度　第一學期第一次期中考 高三數甲試題

參考答案　敬請指正

多選題

1. 3 4 5	2. 3 4	3. 1 2

填充題

A. $\frac{3}{2}$	B. $\frac{11}{72}$	C. $\frac{-3}{56}$	D. $(-1,0)$
E. -8	F. $(-1,5)$	G. $\frac{1}{16}$	H. 15
I. $(8,-12)$	J. $(-3,8,-9)$	K. 3	L. $\frac{127}{48}$
M. $\frac{\sqrt{2}}{2}$			

混合題

1. 1 5
2. 12
3. 16