

*請於答案卡(卷)上畫(寫)上正確身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，統一扣該科總成績 5 分。

一、單選題（占 16 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 4 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

() 1. 有一比賽得分規則為勝一場得 3 分，平手得 1 分，輸一場得 0 分，目前得知某一隊打 12 場共得 15 分，不考慮輸贏場次順序則平手共有幾種情況？

- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6 (5) 7

() 2. 將 5 本不同的數學課本全部分給阿邱、小陳、小張三人且阿邱至少得 1 本，則共有多少種分法？

- (1) 6 (2) 60 (3) 100 (4) 211 (5) 405

() 3. 設 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 > 0, x \text{ 為整數}\}$ ， $B = \{x \mid 3x^2 - 10x - 25 \leq 0, x \text{ 為整數}\}$ ，則 $n(A \cap B)$ 的值為何？

- (1) 1 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

() 4. 從 1 到 20 的 20 個整數中，取出相異的三個數 a, b, c ，使此三個數成為等比數列，且 $a < b < c$ ，則序對 (a, b, c) 的取法有多少種？

- (1) 7 (2) 8 (3) 9 (4) 10 (5) 11

二、多重選題（占 32 分）

說明：第 5 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

() 5. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 之公比為 $-\frac{1}{3}$ ，且 $a_9 > a_{10}$ ，若 $\langle a_n \rangle$ 前 n 項總和表示為 S_n ，請選出正確的選項。

- (1) $a_1 > 0$ (2) (3) $a_8 > a_{10}$ (4) $|a_8| > |a_9|$ (5) $S_{100} > 0$

()6. 已知 $a \neq b$ ，有一實數數列 $a, b, c, b, a, b, c, b, a, b, c, b, a, \dots$ ，請選出正確的選項。

- (1) 此數列的第 51 項為 b
- (2) 若 $a=1, b=2, c=3$ ，則此數列前 51 項的和為 91
- (3) 此數列有可能為等差數列
- (4) 若此數列為等比數列，則 $b=c$
- (5) 若此數列為等比數列，則公比為 -1

()7. 已知 $m = (2^2 + 4^2 + \dots + 20^2) + (2^3 + 4^3 + \dots + 20^3)$ ，請選出 m 的因數。

- (1) 10
- (2) 11
- (3) 21
- (4) 23
- (5) 117

()8. 將「newjeans」八個英文字母排一列，請選出正確的選項。

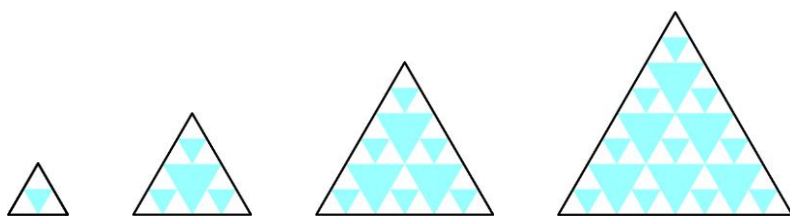
- (1) 共有 10080 種排法
- (2) 若「n」不排最左邊，則共有 7560 種排法
- (3) 母音(a、e、e)皆不相鄰，則共有 180 種排法
- (4) 若母音(a、e、e)只能排在一、三、五的位子，則共有 120 種排法
- (5) 若兩個「n」皆在「e」、「w」的左方，且「e」也要在「w」的左方，則共有 336 種排法

三、選填題（占 42 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9-31)。

2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 用黑、白兩種顏色的三角形地磚，依照如下的規律拼成若干圖形，



第 1 圖

第 2 圖

第 3 圖

第 4 圖

試問第 20 個圖形中，有 ⑨ ⑩ ⑪ 塊白色三角形。

B. 全班 50 人中，喜歡〈零牙之旅〉或〈關於我和鬼變成仇人的那件事〉有 37 人，喜歡〈零牙之旅〉的有 26 人，不喜歡〈關於我和鬼變成仇人的那件事〉但喜歡〈零牙之旅〉有 4 人，試問喜歡〈關於我和鬼變成仇人的那件事〉共有 ⑫ ⑬ 人。

C. 已知等差數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 3$ ， $a_4 = 12$ ，列一數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $b_1 = 4$ ， $b_4 = 20$ ，且數列 $\langle b_n - a_n \rangle$ 為等比數列，則

$$b_{11} = \underline{\textcircled{14} \textcircled{15} \textcircled{16} \textcircled{17}}$$

D. 若 n 為正整數，且滿足 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{200}{201}$ ，則 $n = \underline{\textcircled{18} \textcircled{19} \textcircled{20}}$

E. 三位正整數中，共出現 ⑳ ㉑ ㉒ 個 7？(例：700 算一個 7，707 算兩個 7)

F. 由數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 所組成沒有重複數字的八位數中, 1 與 2 相鄰, 3 與 4 相鄰, 而 5 與 6 不相鄰, 7 與 8 不相鄰的八位數, 共有 24 25 26 27 個。

G. 台灣的雞蛋正夯, 有店家販賣七彩蛋(蛋殼被區分為七個顏色), 購買時以兩顆雞蛋為一組販售, 分左右不同擺放(例: 左邊藍色右邊綠色, 左邊綠色右邊藍色, 視為兩組), 且各色雞蛋數量充足, 同色雞蛋視為相同物, 沒有大小之分, 一組雞蛋中, 可以選擇相同顏色, 也可以選擇不同顏色。小呂、小游想各買一組, 這兩組可以相同, 也可以不同, 則有 28 29 30 31 種不同的買法。

四、非選混合題 (占 10 分)

說明: 第 H-1 至 H-3 為非選混合題, 答案必須寫在「答案卷」上, 同時必須寫出演算過程或理由, 否則將予扣分甚至零分。作答務必使用黑色墨水的筆書寫。

注意: (1)應依據題號順序, 於作答區內作答。(2)非選擇題請由左而右橫式書寫。(3)作答需清晰, 如難以辨識時, 恐將影響成績批閱。(4)不得於作答區書寫無關之文字、圖案符號等記號。(5)共占 10 分。

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)a_{n-1}$, n 為大於或等於 2 的正整數。

H-1. 求 a_2 , a_3 。(各 1 分, 共 2 分)

H-2. 觀察(1)的規則性, 並推測第 n 項 a_n (以 n 表示之)。(3 分)

H-3. 證明在(2)中所推測之結果。(5 分)

< 試題結束, 請記得檢查, 並將答案劃記在答案卡上, 祝考試順利 >

四、非選混合題之答案卷

說明：第 H-1 至 H-3 為非選混合題，答案必須寫在「答案卷」上，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。

注意：(1)應依據題號順序，於作答區內作答。(2)除另有規定外，書寫時應由左至右，橫式書寫。(3)作答需清晰，如難以辨識時，恐將影響成績批閱。(4)不得於作答區書寫無關之文字、圖案符號等記號。(5)共占 10 分。

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)a_{n-1}$ ， n 為大於或等於 2 的正整數。

H-1. 求 a_2 ， a_3 。(各 1 分,共 2 分)

H-2. 觀察(1)的規則性，並推測第 n 項 a_n (以 n 表示之)。(3 分)

H-3. 證明在(2)中所推測之結果。(5 分)

解答

一、單選題 1.(2) 2.(4) 3.(1) 4.(5)

二、多重選題 5.(1)(4)(5) 6.(5) 7. (1)(2)(5) 8. (1)(2)(5)

三、選填題 A. 630 B. 33 C. 1057 D. 200
E. 280 F. 1344 G. 2401

四、非選混合題

H-1. $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$

H-2. $a_n = \frac{n}{n+1}$,

H-3.

① 當 $n=1$ 時, $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\therefore n=1$ 時成立 (1 分)

② 假設 $n=k$ 時成立, 即 $a_k = \frac{k}{k+1}$, k 為正整數(1 分)

③ 則當 $n=k+1$ 時, $a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2-1} \cdot a_k = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2-1} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{(k+1)^2}{k^2+2k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{(k+1)}{(k+1)+1}$ $\therefore n=k+1$ 時亦成立(2 分)

④ 由數學歸納法可知, $a_n = \frac{n}{n+1}$ 對於所有正整數 n 都恆成立(1 分)