

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- 【1】等差數列 $\langle a_n \rangle$ 中共有 15 個項，此數列所有項的算術平均數為 6，現從中刪去兩個項，使剩下的 13 個項之算術平均數亦為 6，已知刪去者之其中一項為 a_9 ，則刪去之另一項為原數列 $\langle a_n \rangle$ 的第 k 項，求 k 值為？
 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6

- 【2】一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{4a_n - 1}{9a_n - 2} \end{cases}, n \text{ 為自然數}$$
，試求：

(I) $a_2 =$ _____， $a_3 =$ _____， $a_4 =$ _____。

(II) 請推測 $a_n =$ _____，並證明你的推測是對的。

小華在練習這個題目的時候，分成下列幾個步驟：

步驟 1： $a_2 = \frac{4 \times \frac{1}{2} - 1}{9 \times \frac{1}{2} - 2} = \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ ，

步驟 2： $a_3 = \frac{4 \times \frac{2}{5} - 1}{9 \times \frac{2}{5} - 2} = \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ ，

步驟 3： $a_4 = \frac{4 \times \frac{3}{8} - 1}{9 \times \frac{3}{8} - 2} = \frac{4}{11} = \frac{4}{11}$ ，

由步驟 1、2、3 推測 $a_n = \frac{n}{3n-1}$ ， n 為自然數，

步驟 4：當 $n=1$ 時， $a_1 = \frac{1}{2}$ ，原式成立，設 $n=k$ 時，原式成立，即 $a_k = \frac{k}{3k-1}$ ， k 為自然數，

步驟 5：當 $n=k+1$ 時， $a_{k+1} = \frac{k+1}{3(k+1)-1} = \frac{k+1}{3k+2}$ 原式成立，

故由數學歸納法得證 $a_n = \frac{n}{3n-1}$ ， n 為自然數。

請你幫小華檢查一下，他是否有做錯，並選出他錯在哪一個步驟？

- (1) 步驟 1 (2) 步驟 3 (3) 步驟 4 (4) 步驟 5 (5) 全部答對

- 【3】錢老闆急需用錢，打算向銀行借 10 萬元並在三個月後還清，他向銀行詢問利息的算法，銀行提出四個方案如下：
 甲：月利率為 2%，每個月複利一次
 乙：月利率為 2%，每半個月複利一次
 丙：第一個月利率為 1%，第二個月為 2%，第三個月為 3%，每個月複利計息
 丁：第一個月利率為 3%，第二個月為 2%，第三個月為 1%，每個月複利計息
 這四個方案以哪一個方案對錢老闆最不利，及所還的本利和為最多？
 (1) 甲方案 (2) 乙方案 (3) 丙方案 (4) 丁方案 (5) 四個方案的本利和都一樣

【4】從班上抽選 5 位學生，調查期末考國文與英文成績如附表，已知該班國文成績最高分者為 100 分，請利用英文對國文的迴歸直線試推估其英文成績約幾分？

國文	62	78	87	85	88
英文	75	80	83	86	81

- (1) 92 (2) 90 (3) 88 (4) 86 (5) 84

【5】已知以下各選項資料的迴歸直線（最適合直線）皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

(1) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>1</td><td>13</td><td>1</td></tr> </table>	x	2	3	5	y	1	13	1	(2) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>3</td><td>10</td><td>2</td></tr> </table>	x	2	3	5	y	3	10	2	(3) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>7</td><td>4</td><td>4</td></tr> </table>	x	2	3	5	y	7	4	4	
x	2	3	5																								
y	1	13	1																								
x	2	3	5																								
y	3	10	2																								
x	2	3	5																								
y	7	4	4																								
(4) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr> </table>	x	2	3	5	y	5	7	3	(5) <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>9</td><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	x	2	3	5	y	9	1	5										
x	2	3	5																								
y	5	7	3																								
x	2	3	5																								
y	9	1	5																								

二、多選題（占 40 分）

說明：第 6 題至第 10 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 10 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

【6】九十一學年度指定科目考試約有 5 萬 4 千名考生報考「數學甲」，考生得分情形（由低至高）如下表，第一列為得分範圍（均含下限不含上限），第二列為得分在該區間之人數佔全體考生之百分比。

0~10	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100
10.45	8.18	11.85	14.96	16.0	15.28	10.81	7.06	3.84	1.57

試問下列有關該次考試考生得分之敘述有哪些是正確的？

- (1) 全體考生得分之中位數在 40 分（含）與 50 分（不含）之間；
- (2) 全體考生得分（由低至高）之第一四分位數在 20 分（含）與 30 分（不含）之間；
- (3) 全體考生得分（由低至高）之第三四分位數在 50 分（含）與 60 分（不含）之間；
- (4) 不到三成的考生得分少於 30 分；
- (5) 如果將得分 ≥ 60 分看成及格，則有四成以上的考生成績及格。

【7】設各項都是實數的等差數列 a_1, a_2, a_3, \dots 之公差為負實數 α 。試選出正確的選項。

- (1) 若 $b_n = -a_n$ ，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$
- (2) 若 $c_n = a_n^2$ ，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$
- (3) 若 $d_n = a_n + a_{n+1}$ ，則 d_1, d_2, d_3, \dots 是公差為 2α 的等差數列
- (4) 若 $e_n = a_n + n$ ，則 e_1, e_2, e_3, \dots 是公差為 $\alpha + 1$ 的等差數列
- (5) 若 f_n 為 a_1, a_2, \dots, a_n 的算術平均數，則 f_1, f_2, f_3, \dots 是公差為 $\frac{\alpha}{2}$ 的等差數列

【8】已知 x 與 y 為相異的實數，則下列哪些數據的標準差與數據 x, x, y 的標準差相同？

- (1) x, y, y
- (2) x, x, y, y
- (3) x, x, x, y, y
- (4) x, x, x, x, y, y
- (5) x, x, x, x, x, y, y

【9】有一組二維數據 (x_i, y_i) ，其中 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y = \frac{3}{5}x + 12$ ，且平均數 $\mu_x = 60$ ，而 y 對 x 的相關係數為 $r_{(x,y)}$ ，今有另一組二維數據 (s_i, t_i) ，其中 $s_i = -\frac{1}{3}x_i + 15$ ， $t_i = \frac{1}{4}y_i + 3$ ，若 t 對 s 的迴歸直線為 $L: t = a + bs$ ，則下列哪些是正確的選項？

- (1) $r_{(x,y)} > 0$
- (2) t 對 s 的相關係數為 $-\frac{1}{12}r_{(x,y)}$
- (3) L 通過 $(-5, 15)$
- (4) $a > 0$
- (5) $b = \frac{9}{20}$

【10】給定 5 組 (X, Y) 數據如下：

X	3	1	3	t	6
Y	1	2	3	4	5

設 Y 對 X 的迴歸直線方程式為 $y = \frac{1}{2}x + 1$ ，請選出正確的選項

- (1) $t = 3$
- (2) X 與 Y 的相關係數為 $\frac{1}{2}$
- (3) X 的標準差大於 Y 的標準差
- (4) 設 $X' = 2X + 1, Y' = 3Y - 2$ ，則 Y' 對 X' 的迴歸直線方程式的斜率亦為 $\frac{3}{4}$
- (5) $X' = 2X + 1, Y' = 3Y - 2$ ，則 Y' 對 X' 的迴歸直線方程式必過 $(9, 7)$

三、選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（11- 35）。
 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

【A】某校想要瞭解全校同學是否知道中央政府五院院長的姓名，出了一份考卷。該卷共有五個單選題，滿分 100 分，每題答對得 20 分答錯得零分，不倒扣。閱卷完畢後，校方公佈每題的答對率如下：

請問此次測驗全體受測同學的平均分數是 ⑪ ⑫ 分。

題號	一	二	三	四	五
答對率	90%	70%	40%	30%	60%

【B】從 1 到 n 的連續整數平方和為 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ，小潔誤記為 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ，

結果在使用公式計算 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + k^2$ 時得到錯誤的答案 969，請問 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + k^2$

的正確的和應為 ⑬ ⑭ ⑮ ⑯。

【C】設 99 個實數的中位數為 20，若增加一個比這 99 個數都還要大的數之後，中位數變成 23，若增加一個比這 100 個數都還要大的數，求這 101 個實數的中位數= ⑰ ⑱。

【D】數列 $\langle a_n \rangle$ 定義如下： $a_n = \frac{1}{3}$ ， $a_{n+1} = \frac{1-a_n}{3-4a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)，則 $a_{2022} = \frac{\textcircled{19} \textcircled{20} \textcircled{21} \textcircled{22}}{\textcircled{23} \textcircled{24} \textcircled{25} \textcircled{26}}$ 。

【E】級數 $\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \dots + \frac{101}{1^2+2^2+3^2+\dots+50^2}$ 之和為 $\frac{\textcircled{27} \textcircled{28} \textcircled{29}}{\textcircled{30} \textcircled{31}}$ (化為最簡分數)。

【F】等差數列 $\langle a_n \rangle$ 前 25 項的「奇數項之和」比「偶數項之和」多了 150，前 50 項的「偶數項之和」比「奇數項之和」多了 150，則此數列的首項為 ⑳ ㉑。

【G】9 個數值 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x$ ，其中 X 為正整數，若這 9 個數的標準差比 8 大，則 X 最小為 ㉒ ㉓。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$

3. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

4. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

一、單選題（占 25 分）

(1) 5 (2) 4 (3) 2 (4) 3 (5) 3

二、多選題（占 40 分）

(6) 123 (7) 345 (8) 14 (9) 134 (10) 345

三、選填題（占 35 分）

(A) 58 (B) 1785 (C) 26 (D) $\frac{2022}{4045}$ (E) $\frac{100}{17}$ (F) 78 (G) 27