

課本內容之參考公式

※ 等差級數和等比級數的求和公式

數列  $\langle a_k \rangle$  的前  $n$  項和為  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。

(1)  $\langle a_k \rangle$  為等差數列，公差為  $d$ ，則  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$ 。

(2)  $\langle a_k \rangle$  為等比數列，公比為  $r$ ，則① 當  $r \neq 1$  時， $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ 。② 當  $r = 1$  時， $S_n = na_1$ 。

※ 單利與複利的本利和公式

設本金  $A$  元存入銀行，每期利率為  $r$ 。

(1) 單利：每期計息一次， $t$  期後的本利和為  $A + (Ar)t = A(1+rt)$ 。

(2) 複利：每期計息一次， $t$  期後的本利和為  $A(1+r)^t$ 。

※ 常用的級數求和公式

(1)  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

(2)  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

(3)  $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ 。

※ 一維數據的相關公式

若有  $n$  筆數據  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，則此組數據的

平均數  $\mu = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ，

變異數為  $\sigma^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2] = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \mu^2$ ，

標準差為  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - \mu^2}$ 。

※ 二維數據的相關公式

(1) 設有  $n$  對  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  的二維數據，且  $\mu_x = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ， $\mu_y = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ ，

則變數  $x$  和變數  $y$  的相關係數為  $r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}} \sqrt{S_{yy}}}$ ，其中

$S_{xx} = (x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2$ ， $S_{yy} = (y_1 - \mu_y)^2 + (y_2 - \mu_y)^2 + \dots + (y_n - \mu_y)^2$ ，

$S_{xy} = (x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)$ 。

(2) 有  $n$  對  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  的二維數據，平均數分別為  $\mu_x$  與  $\mu_y$ ，以最小平方法計算出的最適直線(或稱迴歸直線)方程式可表示為  $L: y - \mu_y = a(x - \mu_x)$ ，其中

$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ ， $S_{xx} = (x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2$ ，

$S_{xy} = (x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)$ ，

整理後為  $L: y = ax + b$ ，其中  $b = \mu_y - a\mu_x$ 。

## 第壹部分、選擇題

### 一、單選題（占 24 分）

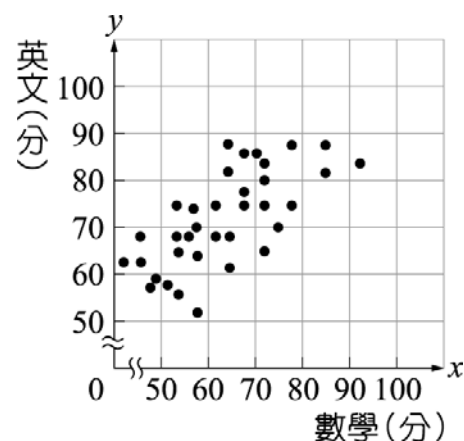
說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- ( ) 1. 假設在小巨蛋球館觀看籃球比賽，已知小延坐在紫色區的席位共有 20 排的座位，此區每一排都比其前一排多  $k$  個座位。小延坐在第 10 排，他發現第 10 排與第 11 排共有 235 個座位。則此巨蛋球場的紫色區總共有多少個座位？  
(1)2200 (2)2350 (3)2460 (4)2510 (5)條件不足，無法計算
- ( ) 2. 設數列  $\langle a_n \rangle$  的前  $n$  項和為  $n^2 + 1$ ，其中  $n$  為正整數，求  $a_1 + a_{2021}$  之值=?  
(1) 4040 (2) 4041 (3) 4042 (4) 4043 (5) 以上皆非
- ( ) 3. 已知 1990 年 NBA 先發球員平均薪資為 500 萬美元，2020 年 NBA 先發球員平均薪資為 2048 萬美元。設每十年薪資平均增長率為  $r$ ，依此成長率作推算，則 2030 年 NBA 先發球員平均薪資為  $x$  萬美元，則  $x$  最接近下列哪一個選項的數值？  
(1) 2800 (2) 3000 (3) 3200 (4) 3400 (5) 3600
- ( ) 4. 請問級數  $(1 - \frac{0}{20})(1 - \frac{1}{20}) + (1 - \frac{1}{20})(1 - \frac{2}{20}) + \dots + (1 - \frac{n}{20})(1 - \frac{n+1}{20}) + \dots + (1 - \frac{19}{20})(1 - \frac{20}{20})$  的和=?  
(1)  $\frac{133}{20}$  (2)  $\frac{135}{20}$  (3)  $\frac{137}{20}$  (4)  $\frac{139}{20}$  (5)  $\frac{141}{20}$

### 二、多重選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- ( ) 5. 三年甲班 35 人某次考試數學成績  $x$  (分) 與英文成績  $y$  (分) 成績的散布圖如右圖，每個點代表一位學生的成績。請選出正確的選項？  
(1) 數學成績與英文成績的相關係數大於 0。  
(2) 數學成績的中位數大於英文成績的中位數。  
(3) 數學成績的標準差大於 30 分。  
(4) 兩科總分大於 160 分者超過 5 位。  
(5) 若將每人的數學成績都加 5 分，且每人的英文成績都減 5 分，則這兩科新成績的相關係數仍然不變。



- ( ) 6. 表格是 2011 年至 2018 年某國總就業人口與農業就業人口的部分相關數據，各年度的人口以人數計，有些是以千人計，有些以萬人計，例如 2011 年總就業人口為 1,070.9 萬人，65 歲以上男性農業就業人口為 69.1 千人。試根據表格資料選出正確的選項。

年別	就業人口			男性農業就業人口按年齡別分			
	總就業人口 (萬人)	農業就業人口 (萬人)	男性農業就業人口 (千人)	39 歲以下 (千人)	40-49 歲 (千人)	50-64 歲 (千人)	65 歲以上 (千人)
2011 年	1,070.9	54.2	386.3	67.6	85.4	164.2	69.1
2012 年	1,086.0	54.4	394.9	67.5	87.0	169.5	70.9
2013 年	1,096.7	54.4	391.5	66.6	83.9	171.3	69.7
2014 年	1,107.9	54.8	391.2	65.8	79.8	173.0	72.6
2015 年	1,119.8	55.5	403.1	71.7	76.9	181.3	73.2
2016 年	1,126.7	55.7	404.5	77.4	77.4	176.4	73.3
2017 年	1,135.2	55.7	405.1	73.9	78.1	178.3	74.8
2018 年	1,143.4	56.1	415.1	72.0	78.8	184.9	79.4

- (1) 從 2013 年至 2018 年，39 歲以下的男性農業就業人口逐年遞減。  
 (2) 從 2013 年至 2018 年，50 歲至 64 歲之男性農業就業人口逐年遞增。  
 (3) 表中，每一年的男性農業就業人口占總就業人口的比率都大於百分之五。  
 (4) 表中，每一年 50 歲至 64 歲之男性農業就業人口都多於 49 歲以下之男性農業就業人口。  
 (5) 就 65 歲以上之男性農業就業人口而言，2018 年比 2011 年增加了超過一萬人。

- ( ) 7. 有 20 筆數據  $(x_i, y_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, 20$ 。已知其平均  $\mu_x = 3$ ， $\mu_y = 5$ ，且  $x$  與  $y$  的相關係數  $r = 0.8$ ，若  $y$  對  $x$  的迴歸直線  $L$  通過點  $(2, 1)$ 。試問下列哪些選項是正確的？  
 (1)  $L$  通過點  $(3, 5)$       (2)  $L$  的斜率為 0.8      (3)  $L$  方程式為  $y = 4x - 7$       (4)  $x$  的標準差大於  $y$  的標準差  
 (5) 若  $P_i = 2x_i + 5$  且  $Q_i = 3y_i + 1$ ，則  $Q$  對  $P$  之迴歸直線的斜率大於  $L$  的斜率。

### 第貳部分、選填題 (占 4 2 分)

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」所標示的列號 (8-22)。  
 2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 用黑、白兩色的正六邊形地磚有規律的拼成若干圖形，如圖所示。依此規律可畫第 4 圖、第 5 圖、...，並設  $a_n$  為第  $n$  圖中白色地磚的總數 (例如  $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ )。求  $a_{100} =$  8 9 10 。



第1圖



第2圖



第3圖

B. 小延年初向銀行借款 10000 元，每年複利計算一次，預定兩年還清。若小延第一年年底還 5200 元，第二年年底還 5253 元後還清，則此次借款的年利率為 11 %。

C. 某次學科能力測驗數學科級分人數累計表，如右附表所示。我們定義此次成績的「頂標、前標、均標、後標、底標」分別為「第 88、75、50、25、12 百分位數」考生的級分。若此次考試的數學科頂標為  $x$  級分、均標為  $y$  級分，則求整數序對  $(x, y) = (\underline{12}, \underline{13})$ ，14。

級分	人數	累計人數
15	3,700	134,495
14	4,630	130,795
13	5,766	126,165
12	5,919	120,399
11	7,891	114,480
10	9,198	106,589
9	8,931	97,391
8	10,317	88,460
7	10,690	78,143
6	10,823	67,320
5	14,298	56,630
4	16,533	42,332
3	14,033	25,799
2	9,732	11,766
1	1,975	2,034
0	59	59

D. 已知一組資料  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  的算術平均數為 6，且  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 400$ ， $A$  為任意實數，試求  $(x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + \dots + (x_{10} - A)^2$  的最小值為 15 16。

E. 二年乙班有 40 人參加英文考試，老師計算成績後，得全班的平均分數為 51 分，標準差為  $\sqrt{3}$  分。但教務處通知：考試當節有一位考生不僅攜帶寵物「蜜袋鼯」進教室擾亂秩序，還利用行動裝置作弊，其原分數 40 分應改為 0 分。而其他 39 位考生因當節考試延長 5 分鐘收卷，故不調整分數。那麼修正後此班 40 位同學考試的標準差為 17 分。

F. 一年丙班的小花，其前五次的數學週考成績( $y$  分)與當週上網時數( $x$  小時)之統計表如下：

當週上網時數 ( $x$ )	8	10	7	9	6
數學週考成績 ( $y$ )	70	60	90	50	80

根據最小平方方法得迴歸直線方程式，若小花在本週上網 7.5 小時，預測其本週數學週考成績為 18 19 分。

G. 右表中的每一橫列由左至右的四個數皆成等差數列，而每一直行由上而下的四個數皆成等比數列且公比皆為  $r$ ，若  $c_1 < c_2$ ，則  $d_4$  之值= 20 21 22。

2	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$b_1$	12	$b_3$	$b_4$
$c_1$	$c_2$	54	$c_4$
$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$

### 第叁部分、單選與非選擇混合題（占 10 分）

說明：

- 第 H-1 題為單選題，有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」標示的第 23 題作答。答對者得 2 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 第 H-2 題為非選擇題，答案必須寫在「答案卷」上，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。  
 注意：(1).應依據題號順序，於作答區內作答。(2).除另有規定外，書寫時應由左至右、橫式書寫。(3).作答須清晰，如難以辨識時，恐將影響成績評閱並傷及權益。(4).不得於作答區書寫無關之文字、圖案符號等。

設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足： $a_1 = \frac{1}{3}$  且  $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{3-a_{n-1}}$  ( $n$  為大於或等於 2 的正整數)。

H-1 (占 2 分)

猜測  $a_{2021}$  之值為何？ 23

- (1)  $\frac{2019}{2022}$    (2)  $\frac{1010}{1011}$    (3)  $\frac{2021}{2022}$    (4)  $\frac{2020}{2023}$    (5)  $\frac{2021}{2023}$ 。

H-2 (占 8 分)

- 利用  $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  的值，推測數列  $\langle a_n \rangle$  一般項的通式？(以  $n$  表示)。(2 分)
- 並利用數學歸納法，證明你的推測是正確的。(6 分)

## 混合題 H-2 之答案卷

說明：第 H-2 題為非選擇題，答案必須寫在「答案卷」上，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。

注意：(1).應依據題號順序，於作答區內作答。(2).除另有規定外，書寫時應由左至右、橫式書寫。(3).作答須清晰，如難以辨識時，恐將影響成績評閱並傷及權益。(4).不得於作答區書寫無關之文字、圖案符號等。

**H-2** (占 8 分) (請依題意作答，並將計算過程用黑色墨水筆(不得用鉛筆)寫於下方空白處。)

設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足： $a_1 = \frac{1}{3}$  且  $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{3-a_{n-1}}$  ( $n$  為大於或等於 2 的正整數)。

- (1) 利用  $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  的值，推測數列  $\langle a_n \rangle$  一般項的通式？(以  $n$  表示)。(2 分)
- (2) 並利用數學歸納法，證明你的推測是正確的。(6 分)

答：

## 解答

一、單選題 1.(2) 2.(4) 3.(3) 4.(1)

二、多重選題 5.(1)(5) 6.(4)(5) 7.(1)(3)(5)

三、選填題 A. 402 B. 3% C. (12,6) D. 40  
E. 8 F. 74 G. 216

8.A	9.A	10.A	11.B	12.C	13.C	14.C
4	0	2	3	1	2	6
15.D	16.D	17.E	18.F	19.F	20.G	21.G
4	0	8	7	4	2	1
22.G	23. (混 H1 單)		.			
6	5					

### H-2 (占 8 分)

設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足： $a_1 = \frac{1}{3}$  且  $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{3-a_{n-1}}$  ( $n$  為大於或等於 2 的正整數)。

- (1) 利用  $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$  的值，推測數列  $\langle a_n \rangle$  一般項的通式？(以  $n$  表示)。(2 分)  
(2) 並利用數學歸納法，證明你的推測是正確的。(6 分)

Sol :

$$(1) a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{3}} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}, a_3 = \frac{1+\frac{2}{4}}{3-\frac{2}{4}} = \frac{3}{5}, a_4 = \frac{1+\frac{3}{5}}{3-\frac{3}{5}} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} \quad \therefore \text{推測 } a_n = \frac{n}{n+2}, n \text{ 為正整數 (2 分)}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ 當 } n=1 \text{ 時, } a_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \therefore n=1 \text{ 時成立 (1 分)}$$

$$\textcircled{2} \text{ 假設 } n=k \text{ 時成立, 即 } a_k = \frac{k}{k+2}, k \text{ 為正整數 (2 分)}$$

$$\textcircled{3} \text{ 則當 } n=k+1 \text{ 時, } a_{k+1} = \frac{1+a_k}{3-a_k} = \frac{1+\frac{k}{k+2}}{3-\frac{k}{k+2}} = \frac{\frac{2k+2}{k+2}}{\frac{2k+6}{k+2}} = \frac{2k+2}{2k+6} = \frac{k+1}{k+3} = \frac{k+1}{(k+1)+2} \quad \therefore n=k+1 \text{ 時亦成立 (2 分)}$$

$$\textcircled{4} \text{ 故由數學歸納法可知, } a_n = \frac{n}{n+2} \text{ 對於所有正整數 } n \text{ 都恆成立 (1 分)}$$