

答案卷

一、單選題：（每題 4 分，共 12 分。請選出最適合的選項，全對才給分。）

1	2	3	
(1)	(2)	(4)	

二、多選題：

1. 每題 7 分，共 28 分，每題至少有一個選項是正確的。
 2. 所有選項均答對者得 7 分；錯一個選項得 4.2 分；錯二個選項得 1.4 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。

4	5	6	7
(2)(3)(5)	(1)(3)(4)(5)	(1)(5)	(2)(4)

三、選填題：

1. 第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (8 - 30)。
 2. 每題完全答對給 6 分，共 60 分。答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A	B	C	D
-4	3	3	-14
E	F	G	H
-21	4I	1	$\frac{17}{21}$
I	J		
945201314	$3\sqrt{5}$		

一、單選題：（每題 4 分，共 12 分。請選出最適合的選項，全對才給分。）

1. 坐標空間中一質點自點 $P(2, 1, 1)$ 沿著方向 $\vec{a} = (2, 2, 1)$ 等速直線前進，經過 6 秒後剛好到達平面 $x + y - 3z = 6$ 上，立即轉向沿著方向 $\vec{b} = (1, -2, 2)$ 依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面 $z = 9$ 上？
 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 永遠不會到達

2. 解下列聯立方程式時， $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ ，將相關的係數與常數以矩陣 A 表達如下： $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ，對矩陣 A 進行高斯消去法的一個步驟：第一列不改變，並將第二列減去第一列的二倍成為新的第二列。試問下列哪一個選項中的矩陣乘積代表對 A 進行上述步驟？

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
 (4) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. 令 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = A + A^{-1} - I$ ，試選出代表 BA 的選項。

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

二、多選題：

1. 每題 7 分，共 28 分，每題至少有一個選項是正確的。
 2. 所有選項均答對者得 7 分；錯一個選項得 4.2 分；錯二個選項得 1.4 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。

4. 在坐標空間中，設直線 $L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ ，直線 $L_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = -4 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ，平面 $E_1 : 2x + 2y + z = 4$ ，平面 $E_2 : x - y + 4z = 1$ ，請選出正確的選項。
 (1) 點 $(-1, 1, 0)$ 在直線 L_1 上 (2) 直線 L_1 與直線 L_2 的方向向量互相垂直 (3) 直線 L_1 與平面 E_1 垂直
 (4) 直線 L_2 在平面 E_2 上 (5) 平面 E_1 與平面 E_2 交於一線

5. 在坐標空間中， A 、 B 為直線 L 上相異兩點，若 A 、 B 兩點到平面 $E : x + 2y - 2z = 3$ 的距離均為 2，則下列哪些選項中的直線可能為直線 L ？

(1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ (2) $\frac{x-7}{-4} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{5}$ (3) $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
 (4) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ z = 1 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

6. 設 A, B 都是三階方陣，若 $A + B = 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $AB = O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，請選出正確的選項。

- (1) $A^2 = 2A$ (2) $A = O$ 或 $B = O$ (3) $B = 2A$ (4) $A^2 + B^2 = 8I$ (5) $A^4 + B^4 = 16I$

7. 設 A 為三階方陣，且對任意實數 a, b, c ， $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}$ 均成立，請選出正確的選項。

- (1) $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2) $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 (5) $A^3 = I$ ， I 為三階單位方陣

三、選填題：

1. 第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (8 - 30)。
 2. 每題完全答對給 6 分，共 60 分。答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標空間中有四點 $A(0, 1, 0)$ 、 $B(-1, 2, 4)$ 、 $C(-2, 1, 3)$ 、 $D(3, 6, -2)$ 。若點 P 在直線 \overleftrightarrow{CD} 上變動，則內積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 之最小可能值為 ⑧ ⑨。

B. 設平面 $E: ax + by + cz - 3 = 0$ 包含兩平行線 $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}$ 與 $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ ，則 $a + b + c$ 之值為 ⑩。

C. 設 x, y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，則 $x + 2y$ 之值為 ⑪。

D. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 為等差數列且 k 為實數。若方程組 $\begin{cases} a_1x - a_2y + a_3z = 2k + 1 \\ a_4x - a_5y + a_6z = k - 5 \\ a_7x - a_8y + a_9z = k + 3 \end{cases}$ 有解，則 k 之值為 ⑫ ⑬ ⑭。

E. 設 M 為 3×2 階矩陣，且滿足 $M \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ， $M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，若 $M \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ ，
 則 $a + b + c + d + e + f$ 之值為 ⑮ ⑯ ⑰。

F. 設 A, B 皆為 2×2 的矩陣， I 為 2 階單位方陣，若滿足 $A - B = I$ 且 $B^2 + 3B = 2I$ ，求 $A^2 + A = \underline{\textcircled{18}} \cdot I$ 。

G. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，且 $B = PAP^{-1}$ ，若 $A^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3^6 & 3^6 \end{bmatrix}$ ，

則 $a + b$ 之值為 $\textcircled{19}$ 。

H. 某異世界為了因應「武漢肺炎」的疫情，大祭司在每週一對全體異世界居民發放甲、乙兩種口罩兌換券，每位居民均可以免費選擇領取甲券一張或乙券一張，其中甲券可以兌換女神阿克雅藍色系列口罩 5 個，乙券可以兌換女神艾莉絲白色系列口罩 5 個。根據長期統計，上週選擇甲券的居民會有 15% 在本週維持選擇甲券、85% 改選乙券；而選擇乙券的民衆會有 20% 在本週改選甲券、80% 維持乙券。試問領取乙券民衆佔全體異世界居民 $\frac{\textcircled{20} \textcircled{21}}{21}$ 時，會形成穩定狀態。

I. 在英雄學院中的某一日，峰田實用簡訊發了一組神奇號碼 $9a_1a_2b_1b_2c_1c_2c_3$ 給麗日御茶子，並提示麗日御茶子下列線索：

(1) $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3$ 皆為介於 $0 \sim 9$ 的整數。

(2) 方程組 $\begin{cases} 9x + a_1y = a_2 \\ 2x + b_1y = b_2 \end{cases}$ 的解為 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{8}$ ，且 $\begin{vmatrix} 9 & a_2 \\ 2 & b_2 \end{vmatrix} = -1$ 。

(3) 矩陣 $\begin{bmatrix} c_2 & c_3 \\ b_2 & c_1 \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。

請問麗日御茶子收到的神奇密碼為 $9 \textcircled{22} \textcircled{23} 2 \textcircled{24} \textcircled{25} \textcircled{26} \textcircled{27} \textcircled{28}$ 。

J. 空間中，兩直線 $L_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-4}{-2}$ ， $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}$ ，試求直線 L_1 與 L_2 的距離為 $\textcircled{29} \sqrt{\textcircled{30}}$ 。