

答案卷

一、多選題：（每題 5 分。所有選項均答對者得 5 分；錯一個選項得 3 分；錯二個選項得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。共 20 分）

1	2	3	4
(A)(C)(D)(E)	(A)(B)(E)	(B)(D)	(A)(B)(D)

二、填充題：（計分方式如下，共 80 分）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	56	60	64	68	72	76	80

1	2	3	4
(4, 1, 5)	-2	(1, 7, 2)	0 或 2
5	6	7	8
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	(16, -16)	(-6, -4)	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
9	10	11	12
$\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1022 & 2046 \\ -1023 & 2047 \end{bmatrix}$	$4x - 5y + 3z = 1$	$2x - y = -1$
13	14	15	16
$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	(12, 3)	134	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

一、多選題：（每題 5 分。所有選項均答對者得 5 分；錯一個選項得 3 分；錯二個選項得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。共 20 分）

1. 關於點 $P(3, 1, 2)$ 、點 $Q(2, 0, 4)$ 及直線 $L: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ ，請選出正確的選項？_____。

- (A) P 點在直線 L 上
- (B) Q 點在直線 L 上
- (C) 直線 \overleftrightarrow{PQ} 與直線 L 垂直
- (D) Q 點到直線 L 的距離為 $\sqrt{6}$
- (E) 包含 L 且與直線 \overleftrightarrow{PQ} 垂直之平面方程式為 $x + y - 2z = 0$

2. 考慮 x, y, z 的方程組 $\begin{cases} 2^x + 3^y - 5^z = 3 \\ 2^{x+1} + 3^y - 5^z = 5 \\ 2^x + 5 \cdot 3^y - a \cdot 5^z = 16 \end{cases}$ ，其中 a 為實數，請選出正確的選項？_____。

- (A) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $x = 1$
- (B) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y > 0$
- (C) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y < z$
- (D) 當 $a \neq 5$ 時，恰有一組 (x, y, z) 滿足此方程組
- (E) 當 $a = 5$ 時，此方程組無解

3. 設 A, B 都是 2 階方陣， O 為 2 階零方陣， I 為 2 階單位方陣，請選出正確的選項？_____。

- (A) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 恆成立
- (B) 若 $A^2 = I$ ，則 $(ABA)^3 = AB^3A$
- (C) 若 $A \neq O$ 且 $AB = AC$ ，則 $B = C$
- (D) $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$ 恆成立
- (E) 若 $AB = O$ ，則 $A = O$ 或 $B = O$

4. 所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：(甲)該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數；(乙)該矩陣的每一行的數字相加都等於 1，今設 A, B 是兩個 2×2 的轉移矩陣， C 是一個 2×1 的轉移矩陣，請選出正確的選項？_____。

- (A) A^2 是轉移矩陣
- (B) AC 是轉移矩陣
- (C) $2A$ 是轉移矩陣
- (D) $\frac{1}{2}(A + B)$ 是轉移矩陣
- (E) $\frac{1}{4}(A^2 + B^2)$ 是轉移矩陣

二、填充題：（計分方式如下，共 80 分）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	56	60	64	68	72	76	80

1. 已知 $A(2, 3, 1)$ ， $B(3, 2, 3)$ 是空間中的二點，求直線 \overleftrightarrow{AB} 與平面 $3x - 2y + z = 15$ 的交點坐標。①_____。

2. 空間中，一道雷射光由點 $A(a, 3, -4)$ 射向點 $B(4, 0, 8)$ ，行走的路徑中與 y 軸交於 C 點，求 a 之值為 ②_____。

3. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 5 \\ 2 & b & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & c \end{bmatrix}$ 經過列運算後，得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，求序對 (a, b, c) 為 ③。

4. 已知聯立方程式 $\begin{cases} x + ay + 3z = 0 \\ x + 2y + (a+1)z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$ 除了 $x = 0, y = 0, z = 0$ 的解，尚有其他解，求 a 的值为 ④。

5. 已知矩陣 A, B 滿足 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ， $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 $A^2 - B^2 =$ ⑤。

6. 已知矩陣 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，設 $(I - A)^5 = aI + bA$ ，求序對 $(a, b) =$ ⑥。

7. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反方陣為 $\begin{bmatrix} 3 & \pi \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ ，則聯立方程式 $\begin{cases} ax + by = -2 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ 的解 $(x, y) =$ ⑦。

8. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ，且 $B = APA^{-1}$ ，求

(1) 矩陣 $B =$ ⑧。 (2) 矩陣 $B^{10} =$ ⑨。 (3) 矩陣 $P^{10} =$ ⑩。

9. 空間中，設點 $P(1, 0, -1)$ ，直線 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{2}$ ， $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{2}$ ，試求下列各題：

(1) 通過點 P 且包含直線 L_1 的平面方程式為 ⑪。 (2) 包含直線 L_1 與 L_2 的平面方程式為 ⑫。

10. 設 P, Q, R 為二階方陣，已知 $PQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ 且 $Q - R = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，則 $P =$ ⑬。

11. 設聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 恰有一組解 $(4, 2)$ ，求聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + 2b_1y - 3c_1 = 0 \\ a_2x + 2b_2y - 3c_2 = 0 \end{cases}$ 的解為 $(x, y) =$ ⑭。

12. 菲歐烈王國中，有衆多魔導士公會，其中妖精的尾巴、蛇姬之鱗、青色天馬三大魔導士公會組成了一個策略聯盟，開始時各有 72、144、144 位魔導士，爲了讓魔導士們吸取其他公會的良好經驗，所以進行兩次移地修業。每次移地修業都是：將當時妖精的尾巴魔導士中的 $\frac{1}{4}$ 移到蛇姬之鱗、 $\frac{1}{4}$ 移到青色天馬；將當時蛇姬之鱗魔導士中的 $\frac{1}{6}$ 移到妖精的尾巴、 $\frac{1}{3}$ 移到青色天馬；將當時青色天馬魔導士中的 $\frac{1}{2}$ 移到妖精的尾巴、 $\frac{1}{3}$ 移到蛇姬之鱗。則兩次的移地修業後，妖精的尾巴有 ⑮ 位魔導士。

13. 對於正整數 n ，設 $(1-i)^n = a_n + i \cdot b_n$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 且 a_n, b_n 爲實數，從恆等式 $(1-i)^{n+1} = (1-i)^n(1-i)$ 可推得 a_n, b_n 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ，試求矩陣 $T =$ ⑯。

答案卷

一、多選題：（每題 5 分。所有選項均答對者得 5 分；錯一個選項得 3 分；錯二個選項得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。共 20 分）

1	2	3	4

二、填充題：（計分方式如下，共 80 分）

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	56	60	64	68	72	76	80

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16