100 學年度指定科目考試

數學乙選擇（填）題答案

<table>
<tr><th colspan="2">題號</th><th>答案</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>1,2</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>1,3,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td>1,2,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td>3,4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>7</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td>9</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td>11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="3">D</td><td>13</td><td>4</td></tr>
<tr><td>14</td><td>3</td></tr>
<tr><td>15</td><td>2</td></tr>
</table>

100 學年度指定科目考試數學乙非選擇題考生作答情形分析

第一處　陳慧美

每年指考成績單寄發後，總有些考生認為自己的數學乙非選擇題，答案明明正確，為何無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題將從兩方面進行分析，(一)是正確的解題步驟，(二)是考生解題的錯誤概念或解法。至於各題的參考解法可詳見二、參考解法示例。

一、正確解題步驟及錯誤解法說明

第一題

試題： 設 a,b 為實數。已知坐標平面上滿足聯立不等式

$$\begin{cases} x+y\geq 0 \\ x+y\leq 6 \\ 2x-y\geq 0 \\ y\geq ax-b \end{cases}$$

的區域是一個菱形。

(1) 試求此菱形之邊長。(4 分)

(2) 試求 a,b。(8 分)

分析：

第(1)小題

(一) 正確解題步驟

本題評量條件不等式，試題分為兩小題，因題幹上的聯立不等式的區域是一個菱形，故第(1)小題評量該菱形的邊長；第(2)小題欲求菱形另一邊的直線方程式。

第(1)小題的可能解法有兩種(可參考二、參考解法示例)：一是找出相鄰兩交點，如：O 與 A 點，或 B 與 C 點，再將這兩點代入距離公式求解菱形邊長。二為先算出 $(0,0)$ 至 $x+y=6$ 的距離，再由 $x+y=6$ 與 $2x-y=0$ 之夾角 θ 求出 $\cos\theta$ (或 $\sin\theta$、$\tan\theta$) 後，求得 $\overline{OA}$ 之值。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(A1)將邊長誤算成菱形的周長。

(A2)不曉得菱形的四邊相等，經過計算後，常得到不等長的邊長。

(A3)將邊長算成平行線的距離。

(A4)並非利用 O 與 A 點，或 B 與 C 點，而是利用 O、C 兩點求解距離，以致無法求解。

第(2)小題

（一）正確解題步驟

a 值解法，因菱形的兩對邊分別平行，又直線 $x+y=0$ 與 $x+y=6$ 平行，故直線 $y=ax-b$ 必與 $y=2x$ 平行，得 $a=2$。

b 值解法有四，解一與解二是利用兩直線 $\begin{cases} y=2x-b \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $C(\frac{b}{3},-\frac{b}{3})$ 或 $C(t,-t)$ 與 O 點的距離為 $2\sqrt{5}$ 求解。解三是由 $(0,0)$ 至 $x+y=6$ 與到 $y=2x-b$ 的距離相等來求解。解四是由菱形對角線相互垂直，可利用斜率或內積相乘得解。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(B1)不曉得利用兩對邊平行求出 $a=2$。

(B2)因利用 $\begin{cases} y=ax-b \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $(\frac{b}{a+1},\frac{-b}{a+1})$，與 $\begin{cases} y=ax-b \\ x+y=6 \end{cases}$ 的交點 $(\frac{b+6}{a+1},\frac{6a-b}{a+1})$ 之距離為 $\sqrt{20}$，多求出 $a=\frac{1}{2}$ 的解。此外，有考生僅求得 $a=2$ 後，就不知該如何求 b 值。

(B3)因利用 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $(0,0)$，與 $\begin{cases} 2x-y=b \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $(\frac{b}{3},\frac{-b}{3})$ 之距離為 $\sqrt{20}$，得到 $b=\pm 3\sqrt{10}$。有些考生未能排除負不合，如：考生誤將菱形區域畫在直線 $2x-y=0$ 的左上方，而得到 b 值為負值。

(B4)無任何算式或理由，直接寫 $b=3\sqrt{10}$，依作答說明規定「必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分」，故無法得分。

本題出自高三選修數學(I)的範圍，考生若能將不等式圖形繪出，此題所運用的解題概念與運算並不複雜，應不難正確作答。不過數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此列式、推理過程是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。

第二題

試題： 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為二階實係數方陣。

(1) 當 A 為轉移矩陣時，試敘述實數 a、b、c、d 須滿足的條件。（6 分）

(2) 試證：當 A 為轉移矩陣時，A^2 也是轉移矩陣（式中 A^2 代表 A 與 A 的乘積）。（6 分）

分析：

第(1)小題

（一）正確解題步驟

本題評量矩陣單元，試題分為二小題，第(1)小題是評量轉移矩陣的定義；第(2)小題是證明當 A 為轉移矩陣時，A^2 也是轉移矩陣。在第(1)小題中，轉移矩陣的定義為 $0\le a,b,c,d\le 1$、$a+c=1$、$b+d=1$，其中若有寫出 $a+c=1$ 與 $b+d=1$，則 a,b,c,d 的條件可寫成 $a,b,c,d\ge 0$ 或 $a,b,c,d\le 1$ 即可。此外，所有條件中行列互換，寫成 $0\le a,b,c,d\le 1$、$a+b=1$、$c+d=1$ 亦可(參閱二、參考解法示例)。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(C1)無法列出完整條件，僅能寫出 1~2 個正確條件，常出現的錯為少列等號，寫成 $0<a,b,c,d<1$。

(C2)無法完整寫出任一條件，如寫成 $a,b,c,d\in R$，或 $ad-bc\ne 0$ 等，因此無法得分。

(C3)寫出 1~2 個正確條件後，又多寫了與轉移矩陣無關的條件，如 $a,b,c,d\in R$，或 $ad-bc\ne 0$ 等，將酌予扣分。

第(2)小題

（一）正確解題步驟

此題的解法為將 A^2 乘開後，得 $\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$，並說明因 A 的各元都是非負實數，故 A^2 的各元也都是非負實數。再經由計算說明第一行的和為 1，第二行的

和為 1，故 A^2 也是轉移矩陣。亦可將 A 中的 c 以 $1-a$ 代入，d 以 $1-b$ 代入，得 $A^2=\begin{bmatrix} a^2+b(1-a) & ab+b(1-b) \\ a(1-a)+(1-a)(1-b) & b(1-a)+(1-b)^2 \end{bmatrix}$，再說明 A^2 為轉移矩陣的理由。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(D1)考生在進行 A^2 矩陣運算時，常會發生矩陣中的某元乘錯，以致於無法得到該運算的分數。

(D2)部分考生會將 a,b,c,d 以數字代入證明之，與原題目不符，因此無法得分。

(D3)說明第一行的和為 1 或第二行的和為 1 時，並無任何計算過程，酌予扣分。

(D4)僅會進行 A^2 矩陣運算，無法完整說明 A^2 為轉移矩陣的原因。

除上述情形外，發現有部分考生直接放棄第二題的證明題，連 A^2 的矩陣運算都不願下筆計算，以致 1 分未得。若將矩陣運算寫成行列式運算，亦 1 分未得。

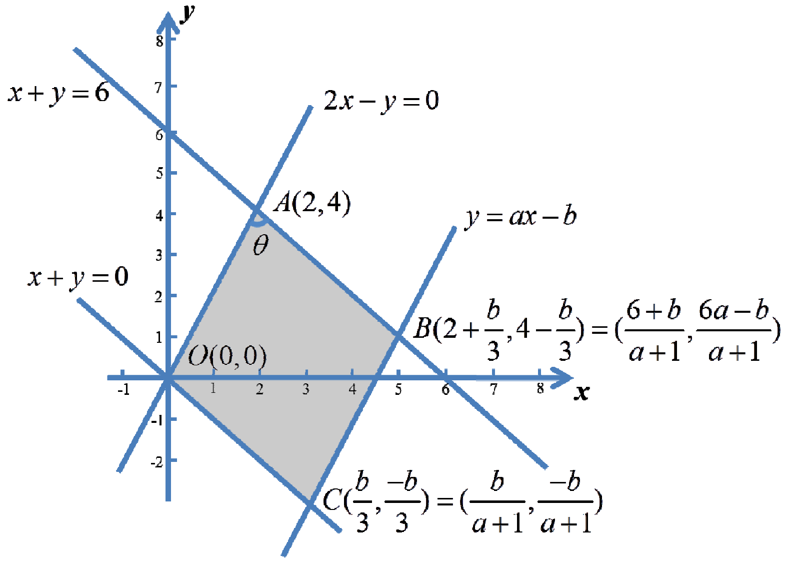
數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數[1]。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部份分數與無法得分的可能情形，以提供老師教學或學生平常練習時的參考。

二、參考解法示例

數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

[1] 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。

第一題



第(1)小題

解法一

兩直線 $\begin{cases}2x-y=0\\ x+y=0\end{cases}$ 的交點為 $O(0,0)$，兩直線 $\begin{cases}2x-y=0\\ x+y=6\end{cases}$ 的交點為 $A(2,4)$

故菱形邊長為 $\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}$ (或 $=\sqrt{20}$) (或 $=2\sqrt{5}$) (或 $\overline{BC}=\sqrt{(2+\frac{b}{3}-\frac{b}{3})^2+(4-\frac{b}{3}+\frac{b}{3})^2}=2\sqrt{5}$)

解法二

$(0,0)$ 到 $x+y=6$ 之距離 $=3\sqrt{2}$

$x+y=6$ 與 $2x-y=0$ 之夾角 θ 滿足 $\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ (或 $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$) (或 $\tan\theta=\pm 3$)，則

$$\overline{OA}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=\sqrt{20}\ (或=2\sqrt{5})$$

第(2)小題

直線 $x+y=0$ 與 $x+y=6$ 平行
故直線 $y=ax-b$ 必與 $y=2x$ 平行；
得知 $a=2$

$\boxed{\text{解法一}}$

兩直線$\begin{cases} y=2x-b \\ x+y=0 \end{cases}$的交點$C(\frac{b}{3},-\frac{b}{3})$，

$\overline{OC}=\sqrt{(\frac{b}{3})^2+(\frac{-b}{3})^2}=2\sqrt{5}$，得到$b^2=90$

又直線$y=2x-b$的y截距$-b<0$ (或x截距$\frac{b}{2}>0$)，即$b>0$，

故$b=\sqrt{90}$ (或$=3\sqrt{10}$)

※註：也可用$\begin{cases} y=2x-b \\ x+y=6 \end{cases}$**的交點**$B(2+\frac{b}{3},4-\frac{b}{3})$，$\overline{AB}=\sqrt{(\frac{b}{3})^2+(\frac{-b}{3})^2}=2\sqrt{5}$。

$\boxed{\text{解法二}}$

兩直線$\begin{cases} x+y=0 \\ y=ax-b \end{cases}$的交點$C(t,-t)$，$t>0$，$(0,0)$到$(t,-t)$的距離為$\sqrt{t^2+(-t)^2}=2\sqrt{5}$ (或$t=\sqrt{10}$)

將$(\sqrt{10},-\sqrt{10})$代入$y=2x-b$，得$b=3\sqrt{10}$

※註：也可用$\begin{cases} x+y=6 \\ y=ax-b \end{cases}$**的交點**$B(t,6-t)$**，得到**$B(2+\sqrt{10},4-\sqrt{10})$**，再代入**$y=2x-b$**，得**$b=3\sqrt{10}$。

$\boxed{\text{解法三}}$

$(0,0)$到$x+y=6$的距離為$\frac{6}{\sqrt{2}}$，$(0,0)$到$y=2x-b$的距離為$\frac{|b|}{\sqrt{5}}$ (或$\frac{b}{\sqrt{5}}$)

$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{|b|}{\sqrt{5}}$ (或$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{b}{\sqrt{5}}$)，又$b>0$，得$b=3\sqrt{10}$

$\boxed{\text{解法四}}$

由$\overline{OB}\perp\overline{AC}$，得$\frac{12-b}{6+b}\cdot\frac{4+\frac{b}{3}}{2-\frac{b}{3}}=-1$ (或內積$(2-\frac{b}{3})(2+\frac{b}{3})+(4+\frac{b}{3})(4-\frac{b}{3})=0$)

即$144-b^2=-(36-b^2)$，得到$b^2=90$

又$b>0$，得知$b=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

第二題

以行來看

第(1)小題

$$\begin{cases} 0 \le a,b,c,d \le 1 \\ a+c=1 \\ b+d=1 \end{cases}$$

※註：已寫出$a+c=1$及$b+d=1$者，僅需寫出$a,b,c,d \ge 0$ (或$a,b,c,d \le 1$)，即可得分。

第(2)小題

解法一：

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

因為A的各元都是非負實數，所以A^2的各元也都是非負實數

第一行：$(a^2+bc)+(ac+cd)=(a^2+ac)+(bc+cd)=a(a+c)+c(b+d)=a+c=1$

第二行：$(ab+bd)+(bc+d^2)=(ab+bc)+(bd+d^2)=b(a+c)+d(b+d)=b+d=1$

故 A^2 也是轉移矩陣

解法二：

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b(1-a) & ab+b(1-b) \\ a(1-a)+(1-a)(1-b) & b(1-a)+(1-b)^2 \end{bmatrix}$$

或$=\begin{bmatrix} a^2+b-ab & ab+b-b^2 \\ 1-a^2-b+ab & 1-ab-b+b^2 \end{bmatrix}$

因為A的各元都是非負實數，所以A^2的各元也都是非負實數

第一行：$(a^2+b-ab)+(1-a^2-b+ab)=1$

第二行：$(ab+b-b^2)+(1-ab-b+b^2)=1$

故 A^2 也是轉移矩陣。

以列來看

第(1)小題

$$\begin{cases} 0 \le a,b,c,d \le 1 \\ a+b=1 \\ c+d=1 \end{cases}$$

※註：已寫出$a+b=1$及$c+d=1$者，僅需寫出 $a,b,c,d \ge 0$ (或$a,b,c,d \le 1$)，即可得分。

第(2)小題

解法一：

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

因為A的各元都是非負實數，所以A^2的各元也都是非負實數

第一列：$(a^2+bc)+(ab+bd)=(a^2+ab)+(bc+bd)=a(a+b)+b(c+d)=a+b=1$

第二列：$(ac+cd)+(bc+d^2)=(ac+bc)+(cd+d^2)=c(a+b)+d(c+d)=c+d=1$

故 A^2 也是轉移矩陣

解法二：

$$A^2=\begin{bmatrix} a & 1-a \\ c & 1-c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1-a \\ c & 1-c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+c(1-a) & a(1-a)+(1-a)(1-c) \\ ac+c(1-c) & c(1-a)+(1-c)^2 \end{bmatrix}$$

或$=\begin{bmatrix} a^2+c-ac & 1-a^2-c+ac \\ ac+c-c^2 & 1-ac-c+c^2 \end{bmatrix}$

因為A的各元都是非負實數，所以A^2的各元也都是非負實數

第一列：$(a^2+c-ac)+(1-a^2-c+ac)=1$

第二列：$(ac+c-c^2)+(1-ac-c+c^2)=1$

故 A^2 也是轉移矩陣。