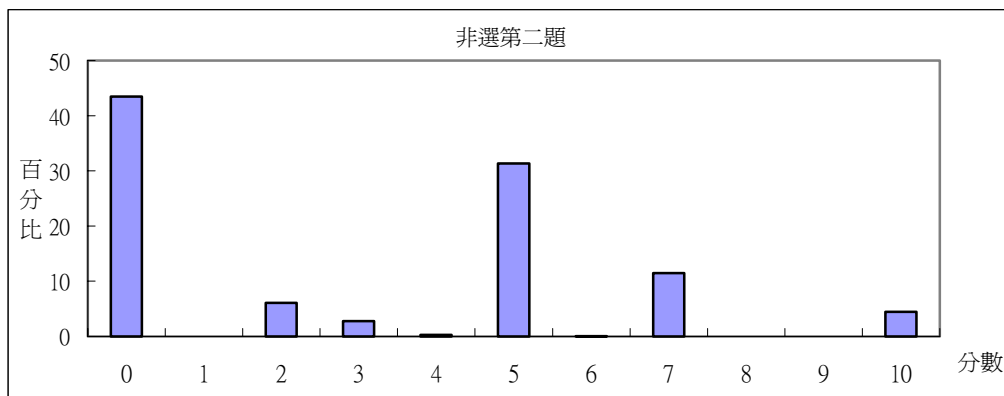


九十六學年度指定科目考試
數學乙選擇題及選填題參考答案

| 題號 | | 答案 |
|----|----|-----|
| 1 | | 3 |
| 2 | | 2 |
| 3 | | 5 |
| 4 | | 125 |
| 5 | | 23 |
| 6 | | 125 |
| 7 | | 245 |
| A | 8 | 1 |
| | 9 | 6 |
| | 10 | 7 |
| B | 11 | 1 |
| | 12 | 2 |
| | 13 | 0 |
| C | 14 | 6 |

※如有疑義，應書明科目、題號及理由並於7月6日前傳真至02-23661365，且於該期限內另以限時掛號郵寄至本中心(郵戳為憑，逾期不予受理)。



圖二 第二題的考生成績分佈圖

由以上分析可知，今年非選擇題零分較往年人數多的原因在於第一題雖為題組，但評量兩個不同概念，對考生而言是兩個不同的問題，難度較高，第二題則是空間觀念的試題，由歷年研究顯示空間單元的難度較高，再加上考生多數不知如何下筆作答以及第 1 小題的提示並未發生功效，使得放棄作答的比例較前兩年多。不過，由考生作答結果亦發現，部分考生知道需用哪些基本概念或技巧解題，但卻不熟悉或不熟練其概念的定義，而導致作答錯誤，實在可惜，建議學生在修習數學時，應確定了解課程中所牽涉的數學各詞的定義及技巧，並於平時多做練習，避免考試時因觀念不清楚而失分。不過今年數甲試題雖然零分較前兩年多，但滿分亦較前兩年多，故對於鑑別考生程度上相當不錯，間接達到協助大學選才的功用。

數學乙

表六列出 91 至 96 年數學乙非選擇題得零分的考生人數及人數百分比（92 年表示“無”，是因為 SARS 取消非選擇題），由表六可看出 96 年的零分人數為 31953 人，百分比為 37%，可明顯看出零分人數百分比為 91 年至 96 年中最高，可能原因為今年非選擇題所評量的概念，如：直線的投影仍為直線，與有理數的推論等概念，皆是考生較不熟悉所致。

表六、91 至 96 年數學乙非選擇題零分人數統計表

| 年度 | 人數 | 人數百分比 |
|-----------|--------------|------------|
| 91 | 6255 | 7% |
| 92 | 無 | |
| 93 | 13348 | 14% |
| 94 | 31808 | 33% |
| 95 | 9798 | 10% |
| 96 | 31953 | 37% |

表七、91 至 96 年數學乙非選擇題滿分人數統計表

| 年度 | 人數 | 人數百分比 |
|----|------|-------|
| 91 | 931 | 1% |
| 92 | 無 | |
| 93 | 9081 | 9.24% |
| 94 | 773 | 0.8% |
| 95 | 9709 | 10% |
| 96 | 2203 | 3% |

另外，由表七可知，今年數學乙中非選擇題得滿分人數為 2203 人，人數百分比 3%，與 95 年相比亦減少許多。以下將針對 96 年數學乙非選擇題做分析：

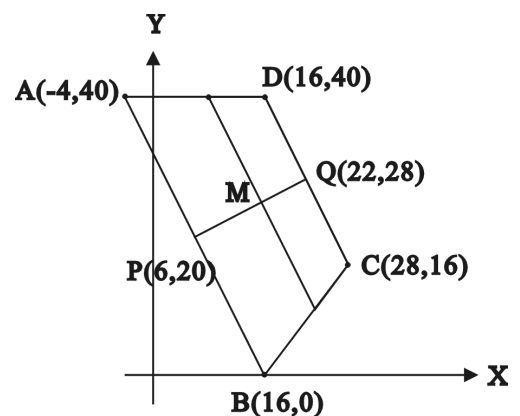
【第一題題目】

某別墅有一個由四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線(假設路燈是一個點光源)透過窗戶在地板上形成一個變形的田字形光影。在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別為 $(-4,40)$ ， $(16,0)$ ， $(16,40)$ 和 $(28,16)$ 。求田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。(13分)

【說明】

數學乙非選擇題第一題是評量考生能否運用直線的投影仍為直線之性質，來求得田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標 M (如圖三)，考生對於此題的解法有下列三種：

- (1) 利用四邊形之兩條對角線 (\overline{AC} 與 \overline{BD}) 求交點；
- (2) 利用等腰梯形性質，求某一對角線 (\overline{AC} 或 \overline{BD}) 與兩底中點連線 \overline{PQ} 求交點；
- (3) 利用內分比求交點坐標 (如：求出 $\overline{AM}:\overline{MC}$ 之比後，再利用分點公式求交點坐標)。



圖三

表八是從 96 年數學乙考生群中，抽樣 876 名考生的答案卷進行分析，表中可看出有二成多的考生連下筆作答都不願意就直接放棄；另有一成五的考生則寫一些與答案無關的內容。但有 24.7% 的考生能完全作對，其中大多數的考生 (約 23%) 是利用此四邊形之兩對角線 (\overline{AC} 與 \overline{BD}) 來求交點。

表八、第一大題非選擇題的作答類型

| 作答類型 | 人數 | 百分比 |
|--|------------|-------------|
| 未答 | 203 | 23.2 |
| 有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答 | 131 | 15 |
| (法一)利用兩對角線求解 | 243 | 27.7 |
| 利用兩對角線求交點，但方程式不正確。 | 24 | 2.7 |
| 利用兩對角線求交點，方程式正確，但交點計算錯誤。 | 12 | 1.4 |
| 完全正確，利用兩對角線求交點。 | 207 | 23.6 |
| (法二)利用等腰梯形性質，求某對角線與兩底中點連線之交點 | 3 | 0.3 |
| 完全正確，利用等腰梯形性質，求某一對角線與兩底之中點連線之交點。 | 2 | 0.2 |
| (法三)利用分點公式來求交點座標 | 16 | 1.8 |
| 完全正確，利用內分比來求交點坐標。 | 8 | 0.9 |
| 求出兩組對邊中點連線後，求二中線交點 | 97 | 11.1 |
| 求出某對邊之兩中點後，再求二中點之中心點 | 94 | 10.7 |
| 計算四點之重心，即 $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \right)$ | 33 | 3.8 |
| 算出某對角坐標之中心點 | 32 | 3.6 |
| 其他 | 20 | 2.3 |

關於解法一的部分，知道要利用四邊形二條對角線求交點的考生比例約為 28%，但只有 23.6%能完全作對。有 2.7%考生求二條對角線方程式時，不慎將方程式寫錯；另有 1.4%考生可得此二條對角線的方程式，卻在解方程式時不小心計算錯誤，以致無法得到正確的交點坐標。

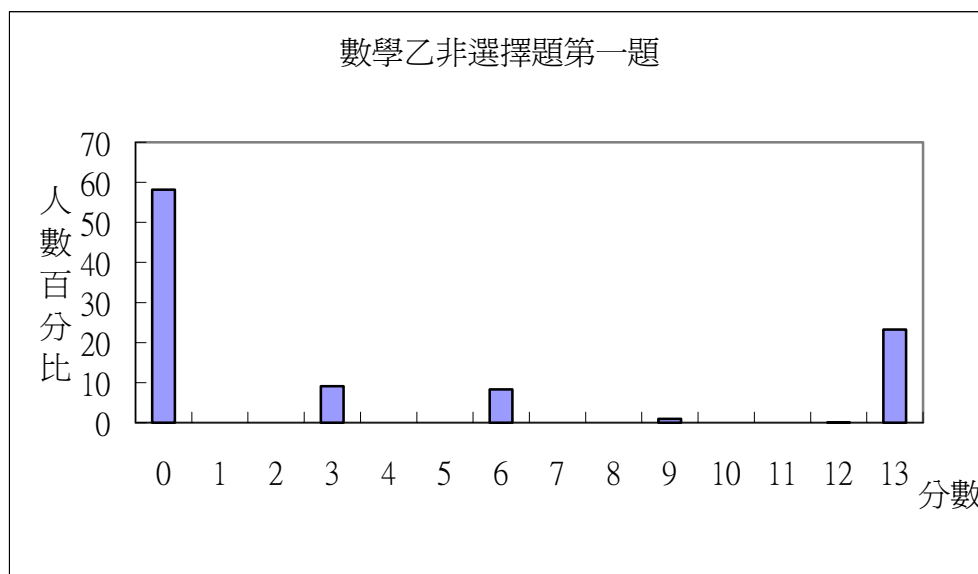
關於解法二的部分，知道利用等腰梯形性質來求解，且以兩底中點連線 \overline{PQ} ，與某一對角線求交點坐標的比例為 0.3%，可見較少考生使用此解法。

關於解法三的部分，知道利用內分比求交點的考生比例為 1.8%，但能完全作答正確的考生有 0.9%。其中作答時較常發生的問題是比例計算錯誤；或比例算對，但在利用內分比時計算錯誤或公式寫錯。

由於此題是求田字形窗戶的中心投影於地板上的坐標，因此有近三成的考生會誤以為四個邊的中心點投影後，仍為投影後圖形的四個邊之中心點，完全忽略了原田字型窗戶的四邊中點，會因窗戶與光源的相對位置之不同，使得投影後不一定仍為四邊中心

點。因此，11.1%的考生會利用圖形的兩組對邊中點連線求交點；或有 3.8%的考生則直接將此四點坐標中的 x 坐標相加後除以 4， y 坐標相加後亦除以 4，來求出投影在地板上的坐標；亦有 10.7%的考生會先求得某組對邊之兩中點後，再求這兩中點的中心點。但這些方法皆因概念不甚正確，故無法正確求得田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。

至於在其他作法中，有考生會假設中心點到四頂點等距離來求解，或在坐標平面中作圖後，再以尺量得長度求坐標…等方法，亦無法得到正確答案。



圖四 數學乙非選擇題第一題成績分佈圖

圖四為數學乙全體考生於非選擇題第一題的得分情形，其中得零分的考生約 58%，可知此群的考生屬於不知該如何作答，或寫一些跟答案無關的內容。約 10%考生各得 3 分或 6 分。另有約 1%的考生得 9 分，可知這群考生可能是在解方程式時計算錯誤。此題得 13 分的人數百分比為 25%，即約四分之一的考生可得滿分。

【第二題題目】

設 r, s 為整數，已知整係數多項式 $x^3 + rx + s$ 的因式分解是

$x^3 + rx + s = (x + a)^2(x + b)$ ，其中 a, b 為相異實數，求證 a, b 都是有理數。(13 分)

【說明】

第二題是評量考生能否將 $x^3 + rx + s = (x + a)^2(x + b)$ 展開，經比較係數後得三個聯立方程式；或由題目中看出 $-a, -a, -b$ 為 $x^3 + rx + s$ 之根，再利用根與係數的關係得聯立方程式。之後再將 a, b 整理成以 r, s 形式，進而推證 a, b 都是有理數。

表九、第二大題非選擇題的作答類型

| 作答類型 | 人數 | 百分比 |
|---|-----------|-------------|
| 未答 | 326 | 37.2 |
| 有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答。 | 70 | 8 |
| 利用展開比較係數(或根與係數的關係)，但在展開 $(x+a)^2(x+b)$ 發生錯誤。 | 43 | 4.9 |
| 利用根與係數的關係，但在寫入根與係數之方程式時符號寫錯，故無法得到二個以上的方程組。 | 15 | 1.7 |
| 只做到將方程式展開，但卻未比較係數 | 10 | 1.1 |
| 將__、__數值代入方程式中，但無法得到二個以上的方程組，其中某數值為 $-a, -b, 1, -2$ 或 $2\dots$ 等。 | 12 | 1.4 |
| 得到二個以上的方程組後，看不出在整理什麼，或就直接下結論 | 160 | 18.8 |
| 得到二個以上的方程組後，可看出想將方程組整理成 $\begin{cases} a = \frac{3s}{2r} & (\text{或 } 2ar = 3s) \\ b = \frac{-3s}{r} & (\text{或 } br = -3s) \end{cases}$ ，但卻因計算錯誤，使得無法得到 $a = \frac{3s}{2r}$ (或 $b = \frac{-3s}{r}$) | 15 | 1.7 |
| 得到二個以上的方程組後，可看出想將方程組整理成 $\begin{cases} -3a^2 = r \\ -2a^3 = s \end{cases} \quad (\text{或 } \begin{cases} \frac{-3}{4}b^2 = r \\ \frac{1}{4}b^3 = s \end{cases})$ 等型式，但卻只能整理出 $-3a^2 = r$ 或 $-2a^3 = s$ | 31 | 3.5 |
| 可得 $a = \frac{3s}{2r}$ (或 $b = \frac{-3s}{r}$)，故 a 為有理數，但卻未說明同理 b 為有理數 | 1 | 0.1 |
| 可得 $\begin{cases} -3a^2 = r \\ -2a^3 = s \end{cases}$ (或 $\begin{cases} \frac{-3}{4}b^2 = r \\ \frac{1}{4}b^3 = s \end{cases}$)，但未說明由 a^3 與 a^2 都是有理數，得 a 為有理數；或未將兩式相除得 a 為有理數，同理 b 為有理數 | 66 | 7.5 |
| 直設假設 a, b 為無理數，或某數如： $a = \sqrt{2}, b = 1$ ； $a = 2, b = -4$ 來證明 | 18 | 2 |
| 其他 | 16 | 1.8 |
| 完全正確 | 95 | 10.8 |

抽樣 876 名數學乙考生的答案卷進行分析（見表九），有三成七的考生未作答，可見這群考生在面對證明題時是直接放棄不願作答，或對文字符號的運算演練有恐懼感，亦或者對有理數、實數的觀念不清楚，而無法著手解題。另有 8% 考生寫一些與答案無關的內容，可看出不知該如何下筆。

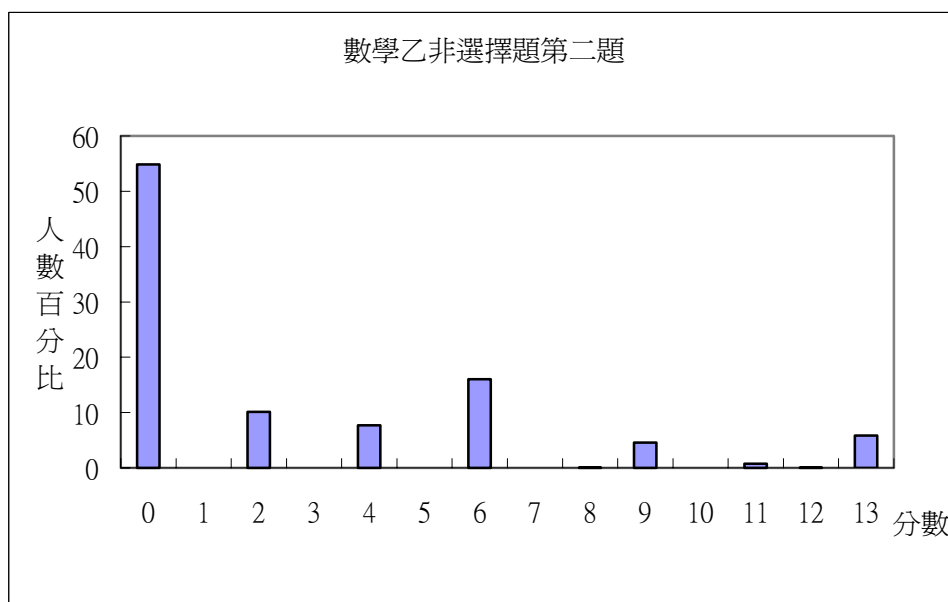
在整理得聯立方程式的部分，有 6.6% 考生知道要將方程式展開後，再利用比較係數或根與係數得方程組，但在開展方程式的整理過程中發生錯誤；另有 1.1% 考生只想到將方程式展開，卻沒想到可利用比較係數得聯立方程式；有考生則是將 $-a$ ， $-b$ 帶入方程式中，但在計算過程中發生正負號寫錯的問題，因而無法得到二個以上的方程組。

在方程組的整理部分，有 18.8% 的考生會利用比較係數法，或根與係數得到二個以上的方程組後，卻不知道應該將 a 、 b 整理成 r 、 s 的形式，可能是因為方程組中有四個未知符號，使得考生找不到任何頭緒來整理式子。另有 5.2% 考生會試著將方程式作整理，卻無法完整整理成

$$\begin{cases} a = \frac{3s}{2r} \\ b = \frac{-3s}{r} \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} -3a^2 = r \\ -2a^3 = s \end{cases}$$
 的型式，大都只能整理出某一項，以致無法做後續的推論。

在推論的部分，有考生已寫出 $a = \frac{3s}{2r}$ ，也推論出 a 為有理數，但卻未說明同理 b 為有理數，使得說明上未盡完善，而失去部分分數。亦有約 7.5% 考生已推論至 $\begin{cases} -3a^2 = r \\ -2a^3 = s \end{cases}$ ，但未說明 a^3 與 a^2 都是有理數，直接下結論得 a 為有理數；或未想到可將兩式相除得 a 為有理數，同理 b 為有理數，可知考生對有理數的定義不甚清楚，導致無法完整推論出 a 、 b 皆為有理數。另有 2% 考生會想要利用反証法來推論 a 、 b 為有理數，會先假設 a 、 b 為無理數，但後續的證明卻不知該如何推論到錯誤的假設。

從表九的作答類型分析可知，約一成的考生能正確推論出 a 、 b 皆為有理數。



圖五 數學乙非選擇題第二題成績分佈圖

圖五為數學乙全體考生於非選擇題第二題的得分情形，得零分的考生人數百分比約 54%，與第一題得零分的考生人數相比還較少些，可能是因為考生只要願意將式子展開整理，再以根與係數或比較係數法來得方程組，皆能得到部分分數。由圖五可知，約有 10% 的考生得 2 分；8% 的考生得 4 分；約 15% 的考生得 6 分，但得 9 分及 13 分的人數則不到一成，可見多數考生只能做到將方程式展開比較係數，或運用根與係數得聯立方程式。但接下來因無法想到可將 a 、 b 整理成以 r 、 s 型式，使得後續的推論無法順利完成。

數學乙兩題計算證明題，第一題評量考生直線的投影能為直線的觀念，第二題則評量有理數的推論，這兩題的計算量並不大，只要對直線投影及有理數的概念清楚，應可下筆作答。但由於這兩題並無任何小題引導，對部份考生而言，實難有頭緒下筆作答；又這二題的零分人數百分比，皆在五成以上，為鼓勵這群考生不要放棄作答非選擇題，可考慮以引導式的小題來設計試題，以幫助考生能下筆作答。

大考中心每年均會針對數學甲、數學乙的非選擇題進行抽樣，並對所抽樣的試卷進行作答類型分析，是為了想瞭解學生在解題過程中所使用的概念與想法，進而從中發現學生可能的迷思概念與錯誤類型，以提供給現場高中教師教學上的參考。此外，高中老師若對此分析，有其教學實務上的補充或意見，亦歡迎老師與我們分享。