112學年度分科測驗

數學甲考科選擇（填）題答案

<table>
<tr><th>題號</th><th>答案</th><th colspan="2">題號</th><th>答案</th><th colspan="2">題號</th><th>答案</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td rowspan="3">9</td><td>9-1</td><td>1</td><td colspan="2">12</td><td>／</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>9-2</td><td>3</td><td colspan="2">13</td><td>／</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>9-3</td><td>3</td><td colspan="2">14</td><td>／</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,2</td><td rowspan="3">10</td><td>10-1</td><td>2</td><td rowspan="2">15</td><td>15-1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1,3</td><td>10-2</td><td>1</td><td>15-2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1,4,5</td><td>10-3</td><td>4</td><td colspan="2">16</td><td>／</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1,4</td><td rowspan="4">11</td><td>11-1</td><td>1</td><td colspan="2">17</td><td>／</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2,3</td><td>11-2</td><td>5</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>11-3</td><td>5</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>11-4</td><td>4</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

※答案「／」者，表示該題為非選擇題。

112 學年度分科測驗
數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題（含非選擇題）、非選擇題。112 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 12、13、14、16、17 題。其中第 12 題為 2 分；第 13 題為 4 分、第 14 題為 6 分、第 16 題為 4 分；第 17 題為 6 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。例如最後求解答案時，因計算錯誤，未得到正確答案；或能運用推理能力解決問題，但未能完整檢驗結果的合理性與正確性。若答題時未於解題過程中清楚表達如何依據題設進行推論，則無法得到分數，例如只有答案，沒有解題過程；或解題觀念錯誤；或一開始用不符合題設的數據作答。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。112 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第 12 題

一、滿分參考答案：

根據題意，將 $P(1,\frac{1}{2})$ 代入 $x^2+y^2-3y+b=0$，推得 $b=\frac{1}{4}$。

再利用 $x^2+y^2-3y+\frac{1}{4}=0$ 配方得 $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=2$，故圓心 C 點坐標為 $(0,\frac{3}{2})$、

$\overrightarrow{CO}=\left(0,-\frac{3}{2}\right)$、$\overrightarrow{CP}=(1,-1)$，

所以 $\overrightarrow{CO}$ 與 $\overrightarrow{CP}$ 夾角的餘弦值為 $\dfrac{\left(0,-\frac{3}{2}\right)\cdot(1,-1)}{\frac{3}{2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

二、評分原則：

正確計算得出題意所求為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

第 13 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

$y=f(x)$圖形在點$P(1,\frac{1}{2})$的切線斜率為$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=1}=1$，直線$CP$斜率為$\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{1-0}=-1$，

直線CP與Ω過點$P(1,\frac{1}{2})$的切線垂直，所以Ω過點$P(1,\frac{1}{2})$的切線斜率為$\frac{-1}{-1}=1$，

兩切線都過P點且斜率相等，所以 $y=f(x)$圖形與 Ω在 P 點有共同的切線。

【解法二】

$y=f(x)$圖形在點$P(1,\frac{1}{2})$的切線斜率為$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=1}=1$，$y=f(x)$圖形在點$P(1,\frac{1}{2})$的切線方程式為 $y=x-\frac{1}{2}$。圓心C到直線 $y=x-\frac{1}{2}$的距離為$\dfrac{\left|0-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，等於半徑，所以 $y=f(x)$圖形與 Ω在 P 點有共同的切線。

二、評分原則：

(1) 正確計算得到 $y=f(x)$圖形與 Ω在$P(1,\frac{1}{2})$的切線斜率為 1，或寫出正確的切線方程式 $y=x-\frac{1}{2}$，且有正確的解題過程。

(2) 正確證明 $y=f(x)$圖形或 Ω其中一個在$P(1,\frac{1}{2})$的切線也是另一個圖形的切線，且有正確的推論過程與理由。

第 14 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

$y=f(x)$圖形對 y軸對稱，圓Ω的圖形也對 y軸對稱，先求在右半平面的面積：x軸、y軸、$x=1$以及線段$\overline{CP}$所圍梯形面積為$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\times1=1$，減去正$y$軸、線段$\overline{CP}$與圓$\Omega$（半徑為$\sqrt{2}$）所圍扇形面積為$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，再減去$\Gamma$與$x$軸以及$x=1$所圍區域面積$\int_0^1\frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{1}{6}$，

得右半平面的面積為$1-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}$，故題意所求面積為$2\times\left(1-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$。

【解法二】

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2-x^2}\right)-\frac{1}{2}x^2\right]dx \quad =\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx$ 為圓 Ω 的上半圓在區間 $[-1,1]$ 的面積，為 $\frac{1}{4}\times\pi\times 2+\frac{2\times1\times1}{2}=\frac{\pi}{2}+1$。

故 $\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=\frac{8}{3}-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$。

二、評分原則：

(1) 正確計算扇形面積 COP 為 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\int_{0}^{1}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}$，且有正確的解題過程。

(2) 正確計算得到題意所求區域面積為 $\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$，且有正確的解題過程。

第 16 題

一、滿分參考答案：

因為 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為長軸的其中一個頂點，且短軸與長軸垂直，故 Γ' 的短軸位在直線 $2y=\sqrt{5}x$ 上，代入方程式 $40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180$，得 $x^2=\frac{16}{9}$，故 $\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為短軸的其中一個頂點，短軸長為 $2\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=4$。

二、評分原則：

(1) 正確計算得到短軸的方程式 $2y=\sqrt{5}x$，且有正確的解題過程。

(2) 正確計算得到短軸長為 4，且有正確的解題過程。

第 17 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

依據題意，線性變換將 $(1,0)$ 變換到 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ 且將 $(0,1)$ 變換到

$\frac{1}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{2}{3}\right)$，所以線性變換的矩陣表示為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$。

設 P 點坐標為 (x,y)，(x,y) 由此線性變換可得 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}x-\frac{\sqrt{5}}{3}y\\ \frac{\sqrt{5}}{3}x+\frac{2}{3}y\end{bmatrix}$，

$P'\left(\frac{2}{3}x-\frac{\sqrt{5}}{3}y,\frac{\sqrt{5}}{3}x+\frac{2}{3}y\right)$在 x 軸上，可推得 $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$

因為 Γ 的方程式為 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ 且 P 點在 Γ 上，將 $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 代入，解得 $x^2=2$

因旋轉角 θ 為銳角，P 點在第四象限，故 $x=\sqrt{2}$，$y=-\frac{\sqrt{10}}{2}$，

P 點坐標為 $\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$。

【解法二】

設 P' 點坐標為 $(a,0)$，$a>0$，代入 Γ' 的方程式，

則 $40\times a^2=180\Rightarrow a^2=\frac{180}{40}=\frac{9}{2}\Rightarrow a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，得到 P' 點坐標為 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$

旋轉 θ 角，則 $\cos\theta=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$，$\sin\theta=\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

旋轉矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 且其逆矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

所以 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\end{bmatrix}$，$P$ 點坐標為 $\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$。

二、評分原則：

(1) 利用試題條件解得橢圓 Γ 的標準式 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ 與 P 點在 $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 上，推得 P 點坐標為 $\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$，且有正確的解題過程。

(2) 正確計算 P' 點坐標為 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$ 與正確寫出旋轉矩陣 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ 的逆矩陣 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$，推得 P 點坐標為 $\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$，且有正確的解題過程。