110 學年度指定科目考試
數學甲考科選擇（填）題答案

題號		答案
1		5
2		2
3		4
4		2,3
5		1,3
6		1,3,4
7		2,5
8		2,4
A	9	—
	10	1
	11	1
	12	2
	13	4
B	14	8
	15	7
C	16	9
	17	2
	18	5
	19	—
	20	4
	21	2
	22	5

110 學年度指定科目考試

數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的《選才電子報》。

110 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

一、 坐標空間中，令 E 為通過三點 $A(0,-1,-1)$、$B(1,-1,-2)$、$C(0,1,0)$ 的平面。假設 H 為空間中一點，且滿足 $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$。根據上述，試回答下列問題。

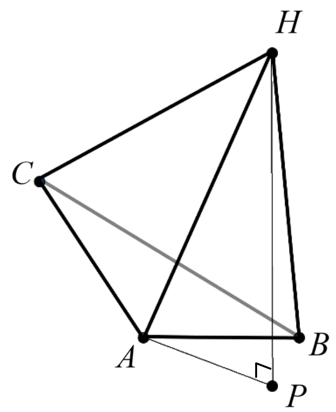
(1) 試求四面體 $ABCH$ 的體積。（4 分）（註：四面體體積為三分之一的底面積乘以高）

(2) 令點 H' 為點 H 相對於平面 E 的對稱點，試求 H' 的坐標。（4 分）

(3) 試判斷點 H' 在平面 E 的投影點是否位在 ΔABC 的內部？並說明理由。（4 分）（註：三角形的內部不含三角形的三邊）

第(1)小題

由於 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 在平面 E 上且 $3\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 與 E 垂直。



故依題意 H 到 E 的距離為 $3\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$。

由 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,1)$，得 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,-1,2)$

以下列出二種解法解出四面體體積

【解法一】

ΔABC 的面積 $=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{3}{2}$

四面體 $ABCH$ 的高為 $3|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=9$，

所以，四面體 $ABCH$ 的體積 $=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 9=\frac{9}{2}$。

【解法二】

ΔABC 的面積乘以 H 到平面 E 的高是以 ΔABC 為底的三角柱體積。因此四面體 $ABCH$ 的體積為 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AH}$ 所展成的平行六面體體積的 $\frac{1}{6}$。

計算 $\overrightarrow{AH}=(\frac{20}{3},-\frac{11}{3},5)$，利用行列式求 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AH}$ 所展成的平行六面體體積，可得

$$\text{四面體 } ABCH \text{ 的體積}=\frac{1}{6}\times\left|\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ \frac{20}{3} & -\frac{11}{3} & 5\end{vmatrix}\right|=\frac{9}{2}$$

或者

$$\frac{1}{6}\times|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AH}|=\frac{1}{6}\times(\frac{40}{3}+\frac{11}{3}+10)=\frac{9}{2}$$

第(2)小題：

設 P 為 H 對平面 E 的投影點，由前知 $\overrightarrow{PH}=3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$。

由於 $\overrightarrow{PH'}=-\overrightarrow{PH}$　故知 $\overrightarrow{AH'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-3(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=(\frac{-16}{3},\frac{7}{3},-7)$。

因而得 H' 之坐標為 $(\frac{-16}{3},\frac{7}{3},-7)+(0,-1,-1)=(\frac{-16}{3},\frac{4}{3},-8)$。

此小題若用點的概念出發解題，而不是向量，則須先求出點 H 坐標 $(\frac{20}{3},\frac{-14}{3},4)$、平面 E 方程式 $2x-y+2z=-1$，再利用直線參數式寫出直線 $\overline{HP}$ 上的點，例如 $(\frac{20}{3}+2t,\frac{-14}{3}-t,4+2t)$，解得 $t=-3$，再求得 H' 之坐標為 $(\frac{-16}{3},\frac{4}{3},-8)$。這兩個解法解題概念相同，但此解法過程和計算皆相當複雜。

第(3)小題： H對平面E的投影點P滿足$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

P點在ΔABC內部若且唯若$\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，其中$r>0,s>0$且$r+s<1$。由第(1)與(2)小題知$H'$對平面$E$的投影點$P$滿足$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，即$r=\frac{2}{3},s=\frac{-1}{3}$，故由$s<0$知$P$點在$\Delta ABC$外部。

此小題也可求出投影點$P(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},-2)$，因為點$P$在平面$y=-\frac{5}{3}$上，而三角形$A$、$B$、$C$三點皆在該平面之同側，即$y>-\frac{5}{3}$。故投影點在三角形外部。

第二題

二、坐標平面上，以Γ表示多項式函數$y=x^3-4x^2+5x$的圖形，且以L表示直線$y=mx$，其中m為實數。根據上述，試回答下列問題。

(1) 當$m=2$時，試求出在$x\geq 0$的範圍內，Γ與L的三個相異交點的x坐標。（2分）

(2) 承(1)，試求Γ與L所圍有界區域面積的值。（4分）

(3) 在$x\geq 0$的範圍內，若Γ與L有三個相異交點，則滿足此條件的m之最大範圍為$a<m<b$，試求a、b之值。（6分）

第(1)小題

解 $x^3-4x^2+5x-2x=0$

$\Rightarrow x(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=0,1,3$

故x坐標為$0,1,3$。

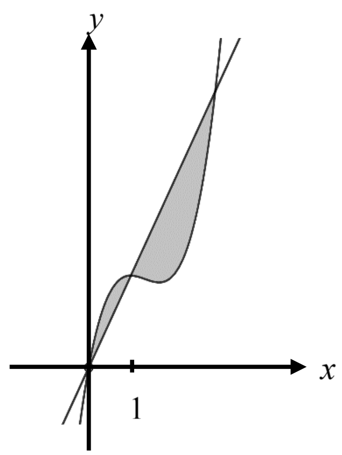
第(2)小題

當 $0\leq x\leq 1$ 時 $x^3-4x^2+5x\geq 2x$；

而當 $1\leq x\leq 3$ 時 $x^3-4x^2+5x\leq 2x$，

在此範圍外$y=x^3-4x^2+5x$和$y=2x$的圖形不再相交，

故所圍有界區域面積為



$$\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx+\int_1^3 -(x^3-4x^2+3x)dx$$

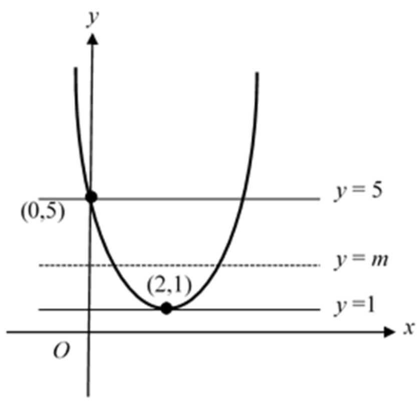
$$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_0^1\right)-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_1^3\right)$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}=\frac{37}{12}$$

第(3)小題

【解法一】

由 $x^3-4x^2+5x-mx=x(x^2-4x+5-m)$ 知原點必為 Γ 與 L 的一個交點。因此滿足題設的 m 需滿足 $x^2-4x+5-m=0$ 有兩相異正實根。



考慮二次函數 $y=x^2-4x+5$ 的圖形與直線 $y=m$ 的交點。

由於 $y=x^2-4x+5$ 的極小值發生於 $2x-4=0$，即 $(2,1)$ 為 $y=x^2-4x+5$ 的頂點。故知 $m>1$ 才會有兩相異交點。

又 $y=x^2-4x+5$ 和 y 軸交於 $(0,5)$。故 $m<5$ 才會使得兩交點的 x 坐標為正。

因此滿足題設的 m 之最大範圍為 $1<m<5$，即 a=1，b=5。

以上也可用二次函數的判別式與根與係數的性質求出 m 之最大範圍。例如 $x^2-4x+5-m=0$ 有兩相異實根的充要條件為 $16-4(5-m)>0$ 得 $m>1$。

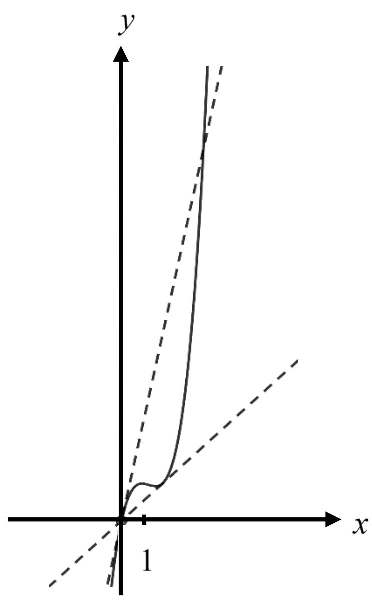
又此兩根需為正，由兩根之和為 4，故知兩根為正的充要條件為兩根之積 $5-m>0$，即 $m<5$。

因此滿足題設的 m 之最大範圍為 $1<m<5$，即 a=1，b=5。

【解法二】

當 Γ 與 L 相切時，交點個數小於 3，故可先考慮通過原點之 Γ 的切線。當切點在原點時，切線斜率 5。當切點 $(x_0,x_0{}^3-4x_0{}^2+5x_0)$ 不在原點時，其切線斜率為 $3x_0{}^2-8x_0+5$，而該點和原點連線之斜率為 $x_0{}^2-4x_0+5$，故 x_0 需滿足 $3x_0{}^2-8x_0+5=x_0{}^2-4x_0+5$，

得 $x_0=2$。得兩切線斜率分別為 5 和 1。



由圖形可知，當 $1<m<5$ 時，Γ 與 L 三個相異交點皆在 $x\geq 0$ 的範圍內；而當 $m<1$ 時，Γ 與 L 只交於原點；又當 $m>5$ 時，Γ 與 L 的交點除原點外，另外兩個交點的 x 坐標分別為一正一負。

故滿足題設的 m 之最大範圍為 $1<m<5$，即 a=1，b=5。