# 107 學年度指定科目考試

## 數學甲考科選擇（填）題答案

<table>
<tr><th colspan="2">題號</th><th>答案</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>1,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td>1,3,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td>2,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>1,3,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td>1,2,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>9</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">B</td><td>11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>8</td></tr>
<tr><td>13</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td>14</td><td>2</td></tr>
<tr><td>15</td><td>6</td></tr>
</table>

# 107 學年度指定科目考試
# 數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。各大題的參考答案說明如下：

## 第一題

第(1)(2)小題

**解法一**

正確寫出可決定坐標系的頂點坐標。例如設 $A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$D(0,a,0)$，$E(0,0,a)$，推得 $G(a,a,a)$，及平面 $BDE$ 的方程式為 $x+y+z=a$。

因 $A(0,0,0)$ 到平面 $x+y+z=a$ 的距離為 $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，且 $\overline{AG}$ 為 $\sqrt{3}a$，故得證第(1)小題。

另外 $\overrightarrow{AG}=(a,a,a)$，與平面 $BDE$： $x+y+z=a$ 的法向量 $(1,1,1)$ 平行，故得證第(2)小題。

**解法二**

利用向量的方法

由 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AG}\bullet(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overline{AD}^2-\overline{AB}^2=0$，

同理 $\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BE}=0$， 因為 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 $BDE$ 的兩向量 $\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BE}$ 皆垂直，

所以 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 $BDE$ 垂直，故得證第(2)小題。

令 $P$ 為 $A$ 對平面 $BDE$ 的投影點，因 $\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{AP}$ 平行，

且 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$。

因 $P$ 在平面 $BDE$ 上，得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$(因為係數和須為 1)。

所以 $\overline{AP}$ 是 $\overline{AG}$ 的三分之一，即 $A$ 到平面 $BDE$ 距離是 $\overline{AG}$ 的三分之一。故得證第(1)小題。

解法三

設正方體的邊長為 $a$。所以四面體 $ABDE$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times a=\frac{1}{6}a^3$。

設 $A$ 點到平面 $BDE$ 的距離為 $h$，而三角形 $BDE$ 為邊長為 $\sqrt{2}a$ 的正三角形，其面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$。推得四面體 $ABDE$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times h$，由 $\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times h$，可解得高 $h=\frac{1}{\sqrt{3}}a$，而對角線長度 $\overline{AG}$ 為 $\sqrt{3}a$，故得證第(1)小題。

因正四面體 $GBDE$ 的邊長為 $\sqrt{2}a$，其高為 $\sqrt{\frac{2}{3}}\times(\sqrt{2}a)$，即 $G$ 點到平面 $BDE$ 的距離為 $\frac{2}{3}\sqrt{3}a$，加上 $A$ 點到平面 $BDE$ 的距離為 $\frac{1}{3}\sqrt{3}a$，恰等於 $A$ 點到 $G$ 點的距離為 $\sqrt{3}a$，故得證第(2)小題。

第(3)小題

由點到平面的公式，可得 $A$ 點到平面 $BDE$ 的距離為 $\frac{|2\times 2+2\times 2-6+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$。

第(4)小題

解法一

由(2)可知向量 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 $BDE$ 垂直，由(1)(3)可知對角線 $\overline{AG}$ 長度為 $3\times 3=9$，

故 $\overrightarrow{AG}=\pm 3(2,2,-1)$，故 $G$ 可能坐標為 $(-4,-4,9)$ 或 $(8,8,3)$，但 $A,G$ 兩點位在平面的兩側，所以 $G$ 點坐標為 $(-4,-4,9)$。

解法二

設 $Q$ 點為 $\overline{AG}$ 與平面 $BDE$ 的交點，因為 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 $BDE$ 垂直，考慮直線 $AQ$ 的參數式 $\begin{cases}x=2-2t\\ y=2-2t\\ z=6-(-1)t\end{cases}$，$t\in R$

代入 $BDE$ 平面方程式 $2x+2y-z=-7$ 得到 $t=1$，所以 $Q=(0,0,7)$，

即 $\overrightarrow{AQ}=(-2,-2,1)$。由(1)(2)小題得到 $\overrightarrow{AG}=3(-2,-2,1)$，

推得 $G$ 點坐標 $=(2,2,6)+3(-2,-2,1)=(-4,-4,9)$

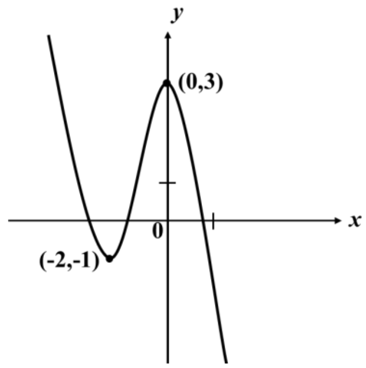
## 第二題

第(1)小題

由 $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

知 $f(x)$在 $x=-2$有極小值 $-1$、在 $x=0$有極大值 3。

由首項係數小於 0，得以下 $y=f(x)$的圖。




第(2)小題

因為 $f(-3)=3$、 $f(-2)=-1$、 $f(-1)=1$、 $f(0)=3$、 $f(1)=-1$，

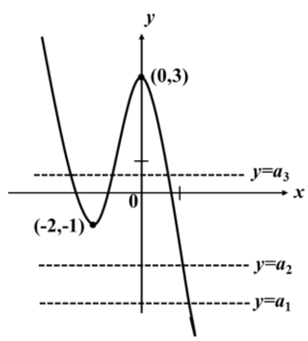
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | − | + | + | − |

可知 $f(x)=0$分別在區間 $(-3,-2)$、 $(-2,-1)$、 $(0,1)$各有一個實根。

因為 $a_1<a_2<a_3$，故 $-3<a_1<-2$、 $-2<a_2<-1$、 $0<a_3<1$。

第(3)小題

由(2)知 $-3<a_1<-2$、 $-2<a_2<-1$、 $0<a_3<1$，由 $a_1,a_2$皆小於極小值 $-1$，可知水平線 $y=a_1$或 $y=a_2$與 $y=f(x)$的圖形皆僅有一交點，又因 $a_3$介於極大值 3與極小值 $-1$之間，故 $y=a_3$與 $y=f(x)$的圖形有三交點；因此 $f(x)=a_1$， $f(x)=a_2$皆恰有一實根，而 $f(x)=a_3$有三相異實根。



第(4)小題

由 $f(x)=-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$，

知求解 $f(f(x))=0$ 等價於求 $-(f(x)-a_1)(f(x)-a_2)(f(x)-a_3)=0$ 的所有實數解，由(3)知共有 $1+1+3=5$ 個相異實根。