104學年度指定科目考試
數學甲考科選擇（填）題答案

<table>
<tr><th colspan="2">題號</th><th>答案</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>3,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td>1,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>1,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td>2,4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td>−</td></tr>
<tr><td>11</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">B</td><td>12</td><td>2</td></tr>
<tr><td>13</td><td>6</td></tr>
<tr><td>14</td><td>−</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C</td><td>16</td><td>1</td></tr>
<tr><td>17</td><td>5</td></tr>
</table>

104學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於8月15日出刊的《選才電子報》。

104學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)題

時針每分鐘轉動角度為 $\frac{\pi}{360}$ 或 $0.5°$，故弧長為 $5\times\frac{\pi}{360}=\frac{\pi}{72}$ 公分

第(2)題

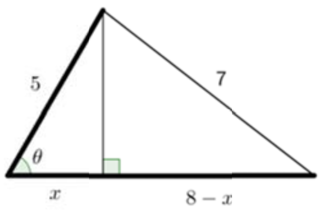
設時針和分針所夾的角度為 θ

【解法一】

$$\cos\theta=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$$

解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $60°$

【解法二】



由右圖知 $5^2-x^2=7^2-(8-x)^2$，得 $x=\frac{5}{2}$，故 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $60°$

第 (3) 題

【解法一】

設 6 點 x 分時，時針針尖與分針針尖的距離為 7 公分

分針每分鐘轉動 $\dfrac{360^\circ}{60}=6^\circ$；時針每分鐘轉動 0.5°

$6^\circ\times x+(60^\circ-0.5^\circ\times x)=180^\circ$

故 $x=\dfrac{240}{11}=21\dfrac{9}{11}\approx 21.8$，最接近的整數分鐘為 6 點 22 分。

【解法二】

時針每分鐘轉動 0.5°，分針每分鐘轉動 6°；六點整，時針和分針夾角為 180°，每隔一分鐘夾角減少 $(6-0.5)^\circ=5.5^\circ$

所求為 $\dfrac{120}{5.5}\approx 21.8$，最接近的整數分鐘為 6 點 22 分。

以上算式也可以弧度表示，例如分針每分鐘轉動 $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$，時針每分鐘轉動角度為 $\dfrac{\pi}{360}$，每隔一分鐘夾角減少 $\dfrac{\pi}{30}-\dfrac{\pi}{360}=\dfrac{11\pi}{360}$。

第二題

第 (1) 題

$$a_6=[\frac{1}{5}+(\frac{1}{5})^2+(\frac{1}{5})^3+(\frac{1}{5})^4+(\frac{1}{5})^5+(\frac{1}{5})^6]-[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^5]$$

第 (2) 題

$$a_{2n}=[\frac{1}{5}+(\frac{1}{5})^2+\cdots+(\frac{1}{5})^{2n}]-[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^3+\cdots+(\frac{1}{3})^{2n-1}]$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{[\frac{1}{5}+(\frac{1}{5})^2+\cdots+(\frac{1}{5})^{2n}]-[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^3+\cdots+(\frac{1}{3})^{2n-1}]\right\}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{8}$$

第(3)題

$a_{2n+2}-a_{2n}$

$=(\frac{1}{5})^{2n+2}+(\frac{1}{5})^{2n+1}-(\frac{1}{3})^{2n+1}$ （ 或$=\frac{6}{5}(\frac{1}{5})^{2n+1}-(\frac{1}{3})^{2n+1}$ ）

以下提供三個解法證明$(\frac{1}{5})^{2n+2}+(\frac{1}{5})^{2n+1}-(\frac{1}{3})^{2n+1}<0$ ，

【解法一】

$(\frac{1}{5})^{2n+2}+(\frac{1}{5})^{2n+1}-(\frac{1}{3})^{2n+1}$

$=\frac{6}{5}(\frac{1}{5})^{2n+1}-(\frac{1}{3})^{2n+1}$

$=\frac{6}{25}(\frac{1}{5})^{2n}-\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{2n}$

因為$\frac{6}{25}<\frac{1}{3}$，故$\frac{6}{25}(\frac{1}{5})^{2n}-\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{2n}<0$

【解法二】

$(\frac{1}{5})^{2n+2}+(\frac{1}{5})^{2n+1}-(\frac{1}{3})^{2n+1}$

$=\frac{5\times3^{2n+1}+3^{2n+1}-5^{2n+2}}{5^{2n+2}\times3^{2n+1}}=\frac{6\times3^{2n+1}-5^{2n+2}}{5^{2n+2}\times3^{2n+1}}$

$=\frac{18\times3^{2n}-25\times5^{2n}}{5^{2n+2}\times3^{2n+1}}<0$

上式也可寫成$(\frac{1}{5})^{2n+2}+(\frac{1}{5})^{2n+1}-(\frac{1}{3})^{2n+1}=\frac{\frac{54}{5}\times3^{2n-1}-25\times5^{2n-1}}{5^{2n+1}\times3^{2n+1}}<0$

【解法三】

$\left(\frac{1}{5}\right)^{(2n+2)}+\left(\frac{1}{5}\right)^{(2n+1)}<\left(\frac{1}{3}\right)^{(2n+1)}\Leftrightarrow\frac{6}{5}<\left(\frac{5}{3}\right)^{(2n+1)}$ ，

而$\left(\frac{5}{3}\right)^{(2n+1)}>\frac{5}{3}$且$\frac{5}{3}>\frac{6}{5}$，故得證。

【解法四】利用數學歸納法

首先證$n=0$的情形，即$(\frac{1}{5})^2+(\frac{1}{5})^1-(\frac{1}{3})^1<0$ 。

接著假設$n=k$的情形，即$(\frac{1}{5})^{2k+2}+(\frac{1}{5})^{2k+1}-(\frac{1}{3})^{2k+1}<0$成立

則當$n=k+1$時

$$(\frac{1}{5})^{2k+4}+(\frac{1}{5})^{2k+3}-(\frac{1}{3})^{2k+3}=(\frac{1}{5})^2((\frac{1}{5})^{2k+2}+(\frac{1}{5})^{2k+1})-(\frac{1}{3})^2(\frac{1}{3})^{2k+1}$$
$$<(\frac{1}{5})^2\left[(\frac{1}{5})^{2k+2}+(\frac{1}{5})^{2k+1}-(\frac{1}{3})^{2k+1}\right]<0$$

故得證。

以下提供兩個解法說明$-\frac{1}{8}\le a_{2n}<0$

【解法一】

由$\{a_{2n}\}$為嚴格遞減 (或$a_{2n+2}<a_{2n}$)且$a_0=0$，得對任意正整數n， $a_{2n}<0$

再由$\{a_{2n}\}$ 為遞減且$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=-\frac{1}{8}$，得對任意正整數$n$， $-\frac{1}{8}\le a_{2n}$

所以$-\frac{1}{8}\le a_{2n}<0$

【解法二】

由$\{a_{2n}\}$為遞減且$a_2<0$，得對任意正整數n， $a_{2n}<0$

再由$\{a_{2n}\}$為遞減且$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=-\frac{1}{8}$，得對任意正整數$n$， $-\frac{1}{8}\le a_{2n}$

所以$-\frac{1}{8}\le a_{2n}<0$