101 學年度指定科目考試

數學甲選擇（填）題答案

題號		答案
1		3
2		1
3		2
4		5
5		4
6		2,3,4
7		1,3,4
8		2,5
9		1,2,3
A	10	0
	11	0
	12	5
	13	3
B	14	2
	15	7

101 學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請詳見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

101 學年度指定科目考試數學甲各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)題

設 f 為 m 次多項式

當 $m>4$ 時， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^4}$ 不存在；而當 $m<4$ 時， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^4}=0$

再由題意 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^4}=5$ 知 f 為 4 次多項式

令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

因 $5=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}(a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}+\dfrac{d}{n^3}+\dfrac{e}{n^4})=a$

所以 f 的最高次項係數為 5

第(2)題：以下提供兩種常見的解法

【解法一】

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$ 知

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=3\cdot 0=0$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$

故 f 的函數圖形在 $x=0$ 的切線方程式為 $y=3x$

【解法二】

令 $f(x)=c_m x^m+\cdots+c_1 x+c_0$(其中 $c_m\neq 0$) 為 m 次多項式，因

$3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c_m x^m+\cdots+c_1 x+c_0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(c_m x^{m-1}+\cdots+c_1+\dfrac{c_0}{x})$

知 $c_0=0$ ，$c_1=3$ ，即 $f(0)=0$ ，$f'(0)=3$

故 f 的函數圖形在 $x=0$ 的切線方程式為 $y=3x$

第(3)題

由（1）、（2）知 $f(x)=5x^4+bx^3+cx^2+3x$，再由 $f''(0)=2$ 知 $c=1$。

故 $f(x)=5x^4+bx^3+x^2+3x$

以下提供兩種常見的解法解出 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 的值。

【解法一】

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(5x^4+bx^3+x^2+3x)dx$$

$$=x^5+\frac{b}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}$$

$$=(1+\frac{b}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2})-(-1+\frac{b}{4}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2})$$

$$=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

【解法二】

因奇數次項在區間 $[-1,1]$ 的積分為 0，所以

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(5x^4+x^2)dx$$

$$=x^5+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}$$

$$=(1+\frac{1}{3})-(-1-\frac{1}{3})$$

$$=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

第二題：**以下提供兩種常見的解法**

【解法一】

第(1)題

由正弦定理得

方程組 $\begin{cases}\dfrac{5}{\sin\frac{1}{2}\angle BAC}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ}\\[2ex] \dfrac{7}{\sin\frac{1}{2}\angle BAC}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ACB}\end{cases}$

再將兩式相除得 $\dfrac{5}{7}=\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin 60^\circ}$

故 $\sin\angle ACB=\dfrac{5}{7}\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

第(2)題

由(1)知 $\cos\angle ACB=\sqrt{1-\sin^2\angle ACB}=\sqrt{1-(\frac{5\sqrt{3}}{14})^2}=\sqrt{1-\frac{75}{14^2}}=\sqrt{\frac{121}{14^2}}=\frac{11}{14}$

以下提供兩種常見的解法求出 $\sin\angle BAC$ 的值。

【**解法一**】由和角公式得

$$\begin{aligned}\sin\angle BAC&=\sin(180^\circ-\angle ABC-\angle ACB)\\&=\sin(180^\circ-60^\circ-\angle ACB)\\&=\sin(120^\circ-\angle ACB)\\&=\sin120^\circ\cos\angle ACB-\cos120^\circ\sin\angle ACB\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB+\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB+\frac{5\sqrt{3}}{28}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11}{14}+\frac{5\sqrt{3}}{28}=\frac{4\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

【**解法二**】由和角公式得

$$\begin{aligned}\sin\angle BAC&=\sin(180^\circ-\angle ABC-\angle ACB)\\&=\sin(60^\circ+\angle ACB)\\&=\sin60^\circ\cos\angle ACB+\cos60^\circ\sin\angle ACB\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB+\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB+\frac{5\sqrt{3}}{28}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11}{14}+\frac{5\sqrt{3}}{28}=\frac{4\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

故 $\sin\angle BAC=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

第(3)題

由正弦定理、(1)與(2)得

$$\frac{\overline{AB}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\frac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

所以 $\overline{AB}=\frac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15}{2}$

【解法二】

第(1)題

由內分比與餘弦定理得

方程組 $\begin{cases} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \dfrac{5}{7} \\ \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos 60° \end{cases}$

令 $\overline{AB} = 5t$ ， $\overline{AC} = 7t\,(t > 0)$

得方程式 $49t^2 = 25t^2 + 144 - 60t$ 或 $2t^2 + 5t - 12 = 0$ ，解得 $t = \dfrac{3}{2}$

故 $\overline{AB} = \dfrac{15}{2}$ ， $\overline{AC} = \dfrac{21}{2}$ 。

以下提供兩種常見的解法求出 $\sin\angle ACB$ 的值。

【解法一】由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle ACB}{\frac{15}{2}} = \frac{\sin 60°}{\frac{21}{2}}$$

故 $\sin\angle ACB = \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

【解法二】由餘弦定理得

$$\cos\angle ACB = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}}$$

$$= \frac{12^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2}{2 \cdot 12 \cdot \frac{21}{2}} = \frac{11}{14}$$

故 $\sin\angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2\angle ACB} = \sqrt{1 - (\frac{11}{14})^2} = \sqrt{1 - \frac{121}{14^2}} = \sqrt{\frac{75}{14^2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

第(2)題：以下提供兩種常見的解法求出 $\sin\angle BAC$ 的值。

【解法一】由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle BAC}{12} = \frac{\sin 60°}{\frac{21}{2}}$$

故 $\sin\angle BAC = \dfrac{12}{\frac{21}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

【解法二】由餘弦定理得

$$\cos\angle BAC=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}}$$

$$=\frac{\left(\frac{21}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2-12^2}{2\cdot\frac{21}{2}\cdot\frac{15}{2}}=\frac{1}{7}$$

故 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{7^2}}=\sqrt{\frac{48}{7^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

第(3)題

由(1)可得 $\overline{AB}=5t=\frac{15}{2}$