

100 學年度指定科目考試

數學甲選擇（填）題答案

題號		答案
1		5
2		2
3		4
4		3
5		1,3
6		1,4
7		2
A	8	1
	9	0
B	10	3
	11	0
C	12	2
	13	7
D	14	1
	15	3

100 學年度指定科目考試數學甲非選擇題考生作答情形分析

第一處 朱惠文

每年指考成績單寄發後，總有些考生認為自己的數學甲非選擇題，答案明明正確，為何無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題將從兩方面進行分析，(一)是正確的解題步驟，(二)是考生解題的錯誤概念或解法。至於各題的參考解法可詳見二、參考解法示例。

一、正確解題步驟及錯誤解法說明

第一題

題目：已知實係數三次多項式函數 $y = f(x)$ 的最高次項係數為 12，其圖形與水平線 $y = 25$ 交於相異的三點 $(0,25)$ 、 $(1,25)$ 及 $(2,25)$ 。

(1) 試求曲線 $y = f(x)$ 圖形上的反曲點坐標。(6 分)

(2) 試求定積分 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值。(6 分)

分析：

第(1)小題

(一) 正確解題步驟

本題評量多項式函數微分與積分的概念與應用，試題分為兩小題，題幹提供一實係數三次多項式的首項係數，及其圖形與一水平線的交點坐標。第(1)小題為求此圖形的反曲點坐標，第(2)小題則求定積分 $\int_0^2 f(x)dx$ 的值。第(1)小題多數人採用的解法有兩種：一是找出多項式，另一個是利用多項式圖形的性質。採第一種解法者，需先根據題意列出多項式，例如 $f(x) = 12x(x-1)(x-2) + 25$ ，或設 $f(x) = 12x^3 + bx^2 + cx + d$ ，由試題所給條件推得 $f(x)$ 。再由反曲點與二階導函數的關係，即 $f''(x) = 12(6x-6)$ ，與 $f''(x) = 0$ ，得反曲點坐標為 $(1,25)$ 。第二種解法則將題意所求的多項式圖形 $y = f(x)$ 視為 $y = 12x(x-1)(x-2)$ 的圖形上移 25 單位，所以兩者的反曲點之 x 坐標相同，且 $y = 12x(x-1)(x-2)$ 的圖形對稱於點 $(1,0)$ ，故反曲點坐標為 $(1,25)$ 。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

- (A1) 列錯多項式方程式：例如誤以為首項係數為 1；或解聯立方程組錯誤；或誤解題意為 $y=12x(x-1)(x-2)$ 的圖形下移 25 單位，而誤為 $f(x)=12x(x-1)(x-2)-25$ 。
- (A2) 理由不夠充分：例如只說 $y=12x(x-1)(x-2)$ 反曲點的 x 坐標為 1，並未提及所求圖形與 $y=12x(x-1)(x-2)$ 圖形的關係，也未提及所求圖形對稱於點 $(1,25)$ 。或誤以為極值發生在 $x=\frac{3}{2}$ 與 $x=\frac{1}{2}$ 處，而據以說反曲點的 x 坐標為兩者的平均值。
- (A3) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如寫出正確的 $f(x)$ ，但微分過程錯誤，如 $f''(x)=72x+72$ ，或寫出正確的 $f''(x)$ ，但求解 $f''(x)=0$ 時，得 $x=-1$ ，等等。

以上這些情形，有些雖寫出了正確的反曲點坐標 $(1,25)$ ，但解題概念錯誤或未提正確理由；或解題概念正確，但計算錯誤，以至於只能得到部分分數，甚或無法得分。

第(2)小題

(一) 正確解題步驟

根據第(1)小題，得出 $f(x)=12x^3-36x^2+24x+25$ 。故 $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (12x^3-36x^2+24x+25) dx = 3x^4-12x^3+12x^2+25x \Big|_0^2 = 50$ 或因為 $y=f(x)$ 的圖形對稱於點 $(1,25)$ ，所以 $\int_0^2 f(x)dx = 25 \times 2 = 50$ 。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

- (B1) 反導函數算錯或圖形概念錯誤：例如能寫出正確的 $f(x)$ ，但反導函數寫成 $3x^4-12x^3+12x^2+25 \Big|_0^2$ ；或誤以為求 $\int_0^2 [12x(x-1)(x-2)] dx$ 等等；或誤認為三次多項式函數圖形對稱於反曲點 $(1,25)$ ，而得到錯誤的 $\int_0^2 f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx$ 。
- (B2) 說明理由不夠充分：例如直接寫 $\int_0^2 f(x)dx = 50$ ，未說明任何理由。
- (B3) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如反導函數正確，但計算錯誤，如 $\int_0^2 f(x)dx = 3x^4-12x^3+12x^2+25x \Big|_0^2 = 96$ 。

本題出自高三選修數學(II)的範圍，而且解題概念各版本均提及，例如三次函數圖形的性質、二階導函數的概念、多項式函數的積分等。對考生而言，應不難正確作答。不過數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此列式、推理過程是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據，並非僅看答案而已。

第二題

題目：(1) 試求所有滿足 $\log(x^3 - 12x^2 + 41x - 20) \geq 1$ 的 x 值之範圍。(6分)

(2) 試證：當 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ 時， $3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}$ 。(6分)

分析：

第(1)小題

(一) 正確解題步驟

本題評量指數與對數單元，試題分為二小題，第(1)小題根據題幹所給算式，求解 x 值之範圍。解題可分為以下三個步驟：

- (1) 根據對數定義，可得 $x^3 - 12x^2 + 41x - 20 > 0$ 且 $x^3 - 12x^2 + 41x - 20 \geq 10$ 。由於第二式成立時，第一式必成立，故僅需求 $x^3 - 12x^2 + 41x - 20 \geq 10$ 之解。
- (2) 移項分解因式得 $(x-1)(x-5)(x-6) \geq 0$
- (3) 推得 x 值之範圍為 $x \geq 6$ 或 $1 \leq x \leq 5$ 。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

- (C1) 不清楚對數定義：例如誤以為 $1 = \log 0$ ；或 $x^3 - 12x^2 + 41x - 20 \leq 10$ ；或 $x^3 - 12x^2 + 41x - 20 = 10$ 。另一錯誤為以為只要求解 $x^3 - 12x^2 + 41x - 20 > 0$ 。
- (C2) 移項因式分解錯誤：例如誤為 $x^3 - 12x^2 + 41x - 10 \geq 0$ 或 $(x+1)(x+5)(x+6) \geq 0$ 等等。
- (C3) 範圍判斷錯誤：例如誤以為 x 值之範圍為 $x \leq 1$ 或 $6 \geq x \geq 5$ ；或 $x \geq 6$ 或 $1 \geq x \geq 5$ ；或 $x > 6$ 或 $1 < x < 5$ 等等。
- (C4) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如因式分解正確，但範圍寫成 $x \geq -1$ 或 $-6 \leq x \leq -5$ 等等。

以上這幾種情形，有些不清楚基本數學概念，例如；對數的性質；有些寫出完整的作答過程，可是計算錯誤，例如移項錯誤，以至於僅能得到部分分數或無法得分。

第(2)小題

(一) 正確解題步驟

本小題為一證明題，過程所引用的條件與算式，其前後關係需說明清楚，且邏輯判斷需正確，方能拿到分數，此題可從不同的角度(解法)證明，其過程大致可分為三個步驟：

- (1) 利用指數的性質，推得 $3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}$ 等價於 $\cos\theta \geq 1 + \sin\theta$ 。
- (2) 確定所要採用的方法，例如和角公式、半角公式、三角形兩邊長的和大於第三邊、正弦與餘弦函數圖形、平方關係等。
- (3) 根據第(2)步驟所採用的解法，連結題意所給角度的限制，正確寫出所應用的條件，完整說明論證過程。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

- (D1) 所採用的解法不正確：例如欲採用和角公式作答，但公式錯誤，如誤寫 $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ ；或採半角公式，但誤以為 $\cos^2\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ 等等。
- (D2) 所引用的條件不足以證明：例如採和角解法，但未說明角度範圍，如寫出 $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ ，直接得證 $\cos\theta - \sin\theta \geq 1$ ，並未說明因 $\frac{7}{4}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ ，故 $\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \geq 1$ ；或只畫出正、餘弦函數圖形，並不足以證明原題成立，需再說明正、餘弦函數在 $\frac{3\pi}{2}$ ， 2π 的值相同，且當 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ 時， $\cos\theta$ 圖形凹向下， $1 + \sin\theta$ 圖形凹向上，才能得到 $\cos\theta \geq 1 + \sin\theta$ 的結論。

以上這幾種情形，有的不清楚或記錯公式，例如半角公式、和角公式等；有些未檢驗條件的充分性與一致性，例如只寫 $\cos\theta \geq 0$ ，並不能得到 $2\sin\theta(1 + \sin\theta) \leq 0$ 的結論，需再說明 $\sin\theta \leq 0$ 才能得證。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，期能有助於老師教學或學生平常練習。

二、參考解法示例

數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

第一題

(1) 【法一】

由函數 $y = f(x)$ 的最高次項係數為 12，且 $f(0) = f(1) = f(2) = 25$ ，可推得 $f(x) = 12x(x-1)(x-2) + 25 = 12x^3 - 36x^2 + 24x + 25$ 。

或設 $f(x) = 12x^3 + bx^2 + cx + d$ ，由 $f(0) = f(1) = f(2) = 25$ 得

$$\begin{cases} d = 25 \\ 12 + b + c + d = 25 \\ 96 + 4b + 2c + d = 25 \end{cases}$$

解得 $b = -36$ 、 $c = 24$ 、 $d = 25$ 。

故 $f'(x) = 12(3x^2 - 6x + 2)$ ， $f''(x) = 12(6x - 6)$

令 $f''(x) = 0$ ，得函數 $y = f(x)$ 圖形上的反曲點坐標為 (1, 25)

【法二】

因為 $y = f(x)$ 的圖形為將 $y = 12x(x-1)(x-2)$ 的圖形上移 25 單位，所以兩者的反曲點之 x 坐標相同，而 $y = 12x(x-1)(x-2)$ 的圖形對稱於點 (1, 0)。

故 $y = f(x)$ 圖形的反曲點坐標為 (1, 25)

(2) 【法一】

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 12(x^3 - 3x^2 + 2x) + 25 dx \\ &= 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 25x \Big|_0^2 \\ &= 3 \times 2^4 - 12 \times 2^3 + 12 \times 2^2 + 25 \times 2 = 50 \end{aligned}$$

【法二】

因為 (1, 0) 是 $g(x) = 12x(x-1)(x-2)$ 的反曲點，以及 $y = g(x)$ 的圖形對稱於反曲點，

$$\text{故 } \int_0^2 g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 0。$$

因此 $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (g(x) + 25) dx = \int_0^2 g(x) dx + \int_0^2 25 dx = 0 + 25x \Big|_0^2 = 50$ 。

所以 $\int_0^2 f(x) dx = 25 \times 2 = 50$

第二題

(1) 由題意得 $\log(x^3 - 12x^2 + 41x - 20) \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 41x - 20 \geq 10 \text{ 且 } x^3 - 12x^2 + 41x - 20 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 41x - 30 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)(x-6) \geq 0$$

因此，滿足 $\log(x^3 - 12x^2 + 41x - 20) \geq 1$ 的 x 範圍為

$1 \leq x \leq 5$ 或 $x \geq 6$

(2) 因為 $3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}$ 等價於 $\cos\theta \geq 1 + \sin\theta$ ，故僅需證明當 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ 時， $\cos\theta \geq 1 + \sin\theta$ 。

【法一】

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{因 } \frac{7}{4}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi, \text{ 所以 } \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

$$\text{得 } \cos\theta - \sin\theta \geq 1 \Leftrightarrow \cos\theta \geq 1 + \sin\theta \Leftrightarrow 3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}, \text{ 得證}$$

【法二】

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{因 } \frac{5}{4}\pi \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi, \text{ 所以 } \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leq -1$$

$$\text{得 } \sin\theta - \cos\theta \leq -1 \Leftrightarrow \cos\theta \geq 1 + \sin\theta \Leftrightarrow 3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}, \text{ 得證}$$

【法三】

$$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 - 2\cos\theta \sin\theta$$

$$\text{當 } \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi, \sin\theta \leq 0, \cos\theta \geq 0, \text{ 推得 } -2\sin\theta \cos\theta \geq 0$$

$$1 - 2\cos\theta \sin\theta \geq 1 \Leftrightarrow (\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 1$$

$$\cos\theta \geq 1 + \sin\theta \Leftrightarrow 3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}, \text{ 得證}$$

【法四】

$$\cos^2 \theta - (1 + \sin \theta)^2 = -2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta = -2 \sin \theta (1 + \sin \theta)$$

$$\text{當 } \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi, \cos \theta \geq 0, \sin \theta \leq 0$$

$$\text{推得 } -2 \sin \theta (1 + \sin \theta) \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 \theta \geq (1 + \sin \theta)^2$$

$$\cos \theta \geq 1 + \sin \theta \Leftrightarrow 3^{\cos \theta} \geq 3^{1 + \sin \theta}, \text{ 得證}$$

【法五】

$$\text{當 } \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi, \sin \theta \leq 0, \text{ 故 } -\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)^2 = -2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta = -2 \cos \theta (\cos \theta - 1)$$

$$\text{因為 } \cos \theta \geq 0, \text{ 所以 } -2 \cos \theta (\cos \theta - 1) \geq 0$$

$$-\sin \theta \geq 1 - \cos \theta \Leftrightarrow 3^{\cos \theta} \geq 3^{1 + \sin \theta}, \text{ 得證}$$

【法六】

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\theta}{2} \leq \pi, \text{ 所以 } \sin \frac{\theta}{2} \leq -\cos \frac{\theta}{2} \text{ (or } \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \leq 0)$$

$$\text{因為 } \sin \frac{\theta}{2} \geq 0, \text{ 所以 } 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq -2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -\sin \theta。$$

$$1 - \cos \theta \leq -\sin \theta \Leftrightarrow 3^{\cos \theta} \geq 3^{1 + \sin \theta}, \text{ 得證。}$$

【法七】

$$\text{當 } \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi, \sin \theta \leq 0, \text{ 故 } \cos \theta \leq 1 - \sin \theta$$

$$\text{因 } \cos \theta \cos \theta = (1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta) \text{ 且 } \cos \theta \geq 0$$

$$\text{所以 } \cos \theta \geq \sin \theta + 1$$

【法八】

$\cos \theta, 1 + \sin \theta$ 在 $\frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 的值相同，且當 $\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ， $\cos \theta$ 圖形凹向下，

$1 + \sin \theta$ 圖形凹向上，所以 $\cos \theta \geq 1 + \sin \theta$ 。

$$\cos \theta \geq 1 + \sin \theta \Leftrightarrow 3^{\cos \theta} \geq 3^{1 + \sin \theta}, \text{ 得證。}$$

【法九】

設 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 為單位圓上一點(如右圖)，且 $\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi$ 。

根據三角形兩邊差小於第三邊，推得 $|\cos \theta| \geq 1 - |\sin \theta|$

因 $\cos \theta \geq 0, \sin \theta \leq 0$ ，所以 $\cos \theta \geq 1 + \sin \theta$

$$3^{\cos \theta} \geq 3^{1 + \sin \theta}, \text{ 得證。}$$

