九十九學年度指定科目考試

數學甲選擇（填）題參考答案

<table>
<tr><th colspan="2">題號</th><th>答案</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td>2,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>8</td><td>－</td></tr>
<tr><td>9</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">B</td><td>10</td><td>－</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">C</td><td>13</td><td>3</td></tr>
<tr><td>14</td><td>3</td></tr>
<tr><td>15</td><td>6</td></tr>
<tr><td>16</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">D</td><td>17</td><td>1</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1</td></tr>
<tr><td>20</td><td>4</td></tr>
</table>

99 學年度指定科目考試

數學甲考科非選擇題評分標準說明

【第一處 / 朱惠文】

每年指考成績單寄發後，有些考生認為我的數學甲非選擇題，答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部份題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的錯誤概念或解法，至於各題的參考解答可詳見附件。

第一題：

題目：設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式。已知原點 $(0,0)$ 為函數 $y=f(x)$ 的圖形之反曲點，且此圖形在原點的切線為 $y=-x$。

(1) 試求 b、c、d。（5 分）

(2) 若 $a>0$ 且 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$ 所圍的有界區域面積為 2，試求 a。（8 分）

分析：

第(1)小題

（一） 正確解題步驟：

本題評量多項式函數微積分的概念與應用，屬於高三選修數學(II)的範圍。試題分為兩小題，題幹提供一實係數三次多項式的反曲點及其切線方程式。第一小題為求出此實係數多項式，第二小題則是已知此圖形與 x 軸所圍的有界區域面積，求此多項式的首項係數。第一小題解題概念有以下三個：

(1) 反曲點 $(0,0)$ 在此函數圖形上，所以 $f(0)=0$，推得 $d=0$。

(2) 切線與一階導函數的關係，即 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，與 $f'(0)=-1$，推得 $c=-1$。

(3) 反曲點與二階導函數的關係，即 $f''(x)=6ax+2b$，與 $f''(0)=0$，推得 $b=0$。

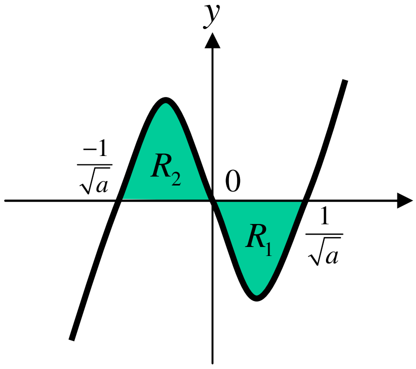
（二） 錯誤概念或解法：

有些考生只寫出 $b=0$、$c=-1$、$d=0$，但並沒有說明理由，即 $f'(0)=-1$ 或 $f''(0)=0$；或誤認為 $f'(x)=ax^2+2bx+c$ 與 $f''(x)=6ax+b$，這些考生雖都寫出正確的 b、c、d 值，但因未說明理由，或過程錯誤，無法拿到全部分數。

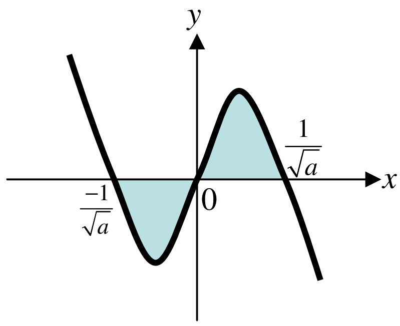
第(2)小題

（一） 正確解題步驟：

根據第(1)小題，可知 $f(x)=ax^3-x$，依此求解第(2)小題。本題的解題步驟可分為以下四個，詳細參考答案可見附件。



圖一



圖二

	解題概念	舉例說明
(1)	了解定積分與面積的關係。	算出 $f(x)=ax^3-x=0$ 的根為 $\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$、0。由 $a>0$ 可畫出 $f(x)$ 的示意圖（如圖一）。根據題意，推得 x 軸與此函數所圍的區域面積為 R_1、R_2 兩個部份，依此列出正確的積分式，例如：$\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\lvert ax^3-x\rvert dx$、$2\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{0}(ax^3-x)dx$、$2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(x-ax^3)dx$ 等。
(2)	正確求解多項式函數的反導函數。	根據(1)，寫出正確的反導函數，例如：$2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(x-ax^3)dx=2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{a}{4}x^4\right)\Big\vert_{0}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=2\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}\right)$
(3)	列出正確的方程式。	將題意「$y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$ 所圍的有界區域面積為 2」轉成數學式，例如：$\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\lvert ax^3-x\rvert dx=2$、$2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(x-ax^3)dx=2$ 或 $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx=-1$ 等
(4)	解聯立方程式，並寫出正確答案。	解出正確的 a 值，為 $a=\frac{1}{4}$。

本題的積分式有多種形式，只要推理過程正確，邏輯觀念清楚，均可得分。

（二）錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部份分數或未得分的幾種情形。

(A) 只是記憶定積分公式，沒有連結三次函數圖形與定積分的關係

本題應先畫出三次函數圖形，了解圖形與 x 軸的相交情形，再列出積分式。有些考生沒有畫圖或畫錯圖形，導致列錯積分式，例如：

(A1) 誤認 $f(x)$ 的圖形（如圖二），列錯積分式，例如 $2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx=2$。

(A2) 沒有畫出 $f(x)$ 的圖形，直接認為有界區域面積為 $\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx$，但此積分值為零，不可能等於 2。這些考生可能知道 $\int_a^b f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的圖形、直線 $y=0$、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成區域的面積，但不清楚所求的面積是 x 軸上方部份的面積減去下方部分的面積，或誤以為此函數在區間 $[a,b]$ 的值均為正數。

以上這幾種情形的考生可能都認真修習相關概念或記憶公式，但沒有確實了解這些概念或公式所代表的含意，例如三次函數圖形與定積分間的關係，因而作答錯誤，非常可惜。

(B) 侷限於定積分的程序性知識，沒有了解定積分與面積間的關係

本題除畫出圖形，列出定積分的數學式，還需要連結定積分與面積的關係。有些考生會列出積分式，但連結面積，寫出方程式錯誤，例如：

(B1) 正確畫出正確的三次函數圖形（如圖一），並知道分段求積分，但不清楚當 $f(x)\le 0$ 時，$f(x)$ 的圖形、直線 $y=0$、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成區域的面積為 $-\int_a^b f(x)dx$。例如：誤將方程式寫成 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx=1$、$\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^0(x-ax^3)dx=1$、

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx+\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^0(ax^3-x)dx=2$。

(B2) 不清楚區間 $[a,b]$ 與定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的關係，誤將方程式寫成 $\int_0^{\frac{-1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx=1$。

(B3) 誤認有界區域面積指的只有左邊或右邊一部分，例如寫成 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(x-ax^3)dx=2$ 或 $\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^0(ax^3-x)dx=2$。

以上這幾種情形的考生可能知道三次函數圖形與定積分的關係，但不了解定積分

與面積間的關係，例如沒有考慮 $f(x)$ 值的正負號；或未考量區間 $[a,b]$ 與面積的關係。致使雖然有完整的作答過程，但概念或答案不正確，而僅能得到部份分數或沒有得分。

(C) 答案正確，但推理過程錯誤或等號前後不一致

本題涉及導數與反導函數的運算，以及解方程式。分析考生作答過程，發現不少前後不一致，推理與邏輯觀念錯誤的情形。例如以下(I)與(II)兩種情形。

$$\text{(I)}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx=1\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=1\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{4a}-\frac{1}{2a}=-1\ \cdots\cdots(3)$$

$$a=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots(4)$$

$$\text{(II)}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx+\int_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{0}(ax^3-x)dx=2\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$2\left(\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)=2\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\frac{1}{4a}-\frac{1}{2a}=-1\ \cdots\cdots(7)$$

$$a=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots(8)$$

第(I)種情形可由(1)可推得(2)的反導函數，但由(2)等式右邊的1，無法得第(3)等式右邊的 -1。第(II)種情形，由(5)等號左邊的積分式所得的反導函數應為零，並無法推得第(6)式等號左邊的反導函數。這些考生可能知道面積值應為正數，但作答過程中，未檢視前後的一致性。以上兩種情形都是完整作答整個過程，但過程中的推理過程與邏輯觀念有誤，例如1不等於 -1，但正確的邏輯觀念與推理過程是指考數學科的測驗目標，這種能力可經由平常練習非選擇題逐步培養。

(D) 其他，例如不清楚數學符號的意義，或列式正確、計算錯誤

有些考生誤用定積分與反導函數的符號，例如將反導函數 $\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{0}$ 寫成 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}x^2$，但以下計算過程均正確。有些會寫出反導函數的值為 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-\frac{a}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$，但化簡錯誤，如 $\frac{-1}{2a}$。這些考生不是不會，但是沒有仔細檢核計算過程，導致過程均正確，可是最後答案錯誤，無法得到滿分，非常可惜。

以上這幾種情形，均只能得到部分分數，或無法得分。本題出自高三選修數學(II)的範圍，而且解題概念各版本均提及，例如三次函數圖形的性質、一階、二階導函數的概念、多項式函數圖形與直線 $x=a,x=b$ 和 $y=0$ 圍出的面積等。對考生而言，應不難下筆作答。不過數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此

列式、推理過程是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。

第二題：

題目：設 $S: x^2+y^2+z^2=54$ 為坐標空間中一球面；L 為坐標空間中通過點 $P(0,-6,9)$ 且方向向量為 $(1,4,-2)$ 的直線。

(1) 試求 L 與 S 的所有交點之坐標。（5 分）

(2) 在所有包含 L 的平面與 S 相交所得之圓中，面積最大值為何？（2 分）

(3) 在所有包含 L 的平面中，與 S 相交所得之圓面積最小者，其平面方程式為何？（6 分）

分析：

第(1)小題

（一） 正確解題步驟：

本題評量圓與球面方程式單元，屬於高二必修數學的範圍。試題分為三小題，題幹提供一球面方程式 S 與空間中一直線 L。第一小題為求出 L 與 S 的所有交點，第二小題與第三小題評量所有包含 L 的平面與 S 相交所得之圓的問題。第二小題是相交圓中，面積最大的圓面積；第三小題則是圓面積最小的平面方程式。第一小題的解題可分為三步驟（詳細解答請見附件）：

(1) 寫出直線 L 的參數式、比例式或兩面式，例如直線參數式 $\begin{cases} x=t \\ y=4t-6 \\ z=-2t+9 \end{cases}$

(2) 將(1)代入球面方程式 $S: x^2+y^2+z^2=54$，例如：$t^2+(4t-6)^2+(-2t+9)^2=54$

(3) 解方程式，求得兩點為 $(1,-2,7)$ 與 $(3,6,3)$

（二） 錯誤概念或解法：

以下列舉幾個此小題無法得分或得部份分數的可能情形，例如：

(A) 不清楚直線參數式點與向量的關係，誤將直線參數式寫成 $\begin{cases} x=1 \\ y=-6t+4 \\ z=9t-2 \end{cases}$。

(B) 會寫出直線參數式，也知道符合直線參數式與球面方程式的點，即為 L 與 S 交點。但不知道如何連結這兩個方程式，例如將 $t=1,2,3,\cdots$ 逐個代入球面方程式，求得兩個點。不過採此解法者，應說明球與直線的交點情形可能兩個、1 個或是沒有交點。

(C) 會寫出正確的參數式，也會代入球面方程式，但化簡錯誤。例如正確寫出 $t^2+(4t-6)^2+(-2t+9)^2=54$，但平方化簡後得 $t^2+4t+3=0$；或正確化簡得

$t^2-4t+3=0$，但因式分解得 $(t+1)(t+3)=0$；或因式分解正確 $(t-1)(t-3)=0$，但解出 $t=-1,-3$。

以上這幾種情形，有些是錯誤的基本概念或知識，例如連結直線方向向量與參數式；有些能架構圖形，但無法以數學式完整說明；有些知道如何求解，也會寫出完整的作答過程，可是計算錯誤，以至於僅能得到部份分數或無法得分，非常可惜。

第(2)小題

（一） 正確解題步驟：

第二小題只需說明包含點 A、B 的圓中最大者為大圓，其面積為 54π。

（二） 錯誤概念或解法：

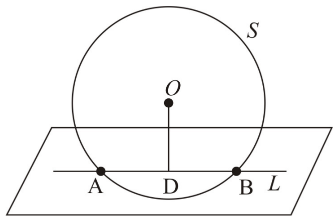
有些考生可能知道圓面積為 πr^2 或誤認面積為 r^2，誤答面積為 54，以致答案錯誤，無法得分。

第(3)小題

（一） 正確解題步驟：

第三小題的解法有很多種，大致可分為以下三步驟：

(1) 正確求出小圓的圓心坐標為 $(2,2,5)$。例如根據第(1)小題，畫出圖形（如圖三）後，知道包含點 A、B 的圓中以 $\overline{AB}$ 為直徑者的面積最小，此圓之圓心為線段 $\overline{AB}$ 之中點 $(2,2,5)$；或利用球心到直線 L 的距離最短的點；或球心到直線的投影點等方法求出小圓的圓心坐標。各解法的參考答案請見附件。



圖三

(2) 小圓圓心 $(2,2,5)$ 與球心 $(0,0,0)$ 所成的向量 $(2,2,5)$ 即為所求平面之一法向量。

(3) 因為小圓圓心 $(2,2,5)$ 在此平面上，故平面方程式為 $2(x-2)+2(y-2)+5(z-5)=0$，化簡得 $2x+2y+5z=33$。也可利用第(1)小題所求的兩點 $(1,-2,7)$ 與 $(3,6,3)$，得平面方程式為 $2(x-1)+2(y+2)+5(z-7)=0$ 或 $2(x-3)+2(y-6)+5(z-3)=0$。

雖然求出小圓圓心的做法很多，但不管採取哪種解法，只要解題的推理過程正確，邏輯觀念清楚，均可得到分數。

（二） 錯誤概念或解法：

以下分析此小題得部份分數或無法得分的幾個原因。

(A) 會畫出相關的圖形，但不曉得如何求出平面的法向量。例如：會畫出圖形（見圖三），知道求出兩點的中點 $(2,2,5)$，但不曉得球心與此中點所成的向量即為法向量。或只知道求出中點，接下來不知如何作答。

(B) 能完整寫出作答過程，可是計算錯誤。例如：求得中點是 $(2,2,5)$，但將平面方程式寫成 $2(x-2)-2(y-2)+5(z-5)=0$；或採取球心到直線的投影點，但投影點公式記錯；或採取直線 L 到球心的距離最小的點，但化簡配方錯誤，或配方正確，但代入求圓心坐標時算錯；或是求出正確的法向量，但代入 $2(x-2)+2(y-2)+5(z-5)=0$，化簡錯誤，求得 $2x+2y+5z=34$。

以上這幾種情形，有的是不清楚平面方程式與法向量的關係；有些會畫出圖形與相交平面的可能情形，但是不知道如何求平面的法向量；有些會寫出完整的作答過程，但是計算錯誤，或是寫出正確的法向量，但求解平面方程式錯誤，這些考生不是不會作答，而是沒有隨時審核答案的正確性，因此只能得到部份分數或無法得分，非常可惜。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數[1]。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部份分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。若考生對自己的非選擇題成績有疑慮，可以申請複查，大考中心會調閱答案卷，檢視成績[2]。

附件

數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

第一題參考答案：

（1）由題設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ ，$f''(x)=6ax+2b$ ；

因 $y=f(x)$ 的圖形過原點 $(0,0)$ ，即 $f(0)=0$ ，推得 $d=0$

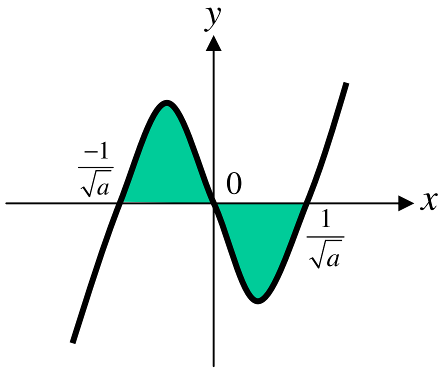
原點 $(0,0)$ 為函數 $y=f(x)$ 圖形的反曲點，故 $2b=f''(0)=0$

因為圖形在原點的切線斜率為 $-1 \Rightarrow c=f'(0)=-1$ 。

故 $b=0, c=-1, d=0$ 。

（2）（甲）由(1)可知 $f(x)=ax^3-x=x(ax^2-1)$ ，

$y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$ 交於 $x=0$ 、$\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$ （如右圖）。



[1] 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。
[2] 大考中心(民 97)，大學入學考試中心說明稿。大考中心網站：http://www.ceec.edu.tw

（乙）$y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$ 所圍的有界區域面積為定積分

$$\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left|ax^3-x\right|dx=2$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(x-ax^3)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a}{4}x^4\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)=2\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}\right)=\frac{1}{2a}=2$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

關於 $\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left|ax^3-x\right|dx=2$ 亦可列成下列形式：

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(x-ax^3)dx=1$，或 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(ax^3-x)dx=-1$，或 $\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{0}(x-ax^3)dx=-1$，

或 $\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{0}(ax^3-x)dx=1$，或 $\int_{\frac{-1}{\sqrt{a}}}^{0}(ax^3-x)dx+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(x-ax^3)dx=2$

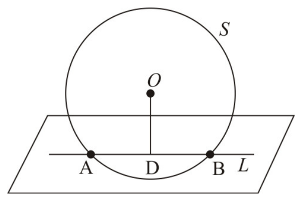
第二題參考答案：

（1）過點 $P(0,-6,9)$ 且方向向量為 $(1,4,-2)$ 的直線 L 之參數式為 $(t,4t-6,-2t+9)$。

將 L 之參數式 $(t,4t-6,-2t+9)$ 代入 S 的方程式 $t^2+(4t-6)^2+(-2t+9)^2=54$，

化簡得 $21(t^2-4t+3)=0$，解得 $t=1$ 或 3。

因此 L 與 S 的交點為 $A(1,-2,7)$、$B(3,6,3)$（如右圖）。



（2）包含點 A、B 的圓中最大者為大圓，其面積為 54π。

（3）（甲）以下提供 3 個方法求出圓面積最小的圓心。

【法一】包含點 A、B 的圓中以 $\overline{AB}$ 為直徑者的面積最小。此圓之圓心即為線段 $\overline{AB}$ 之中點 $D(2,2,5)$。

【法二】當球心 $(0,0,0)$ 與直線 L 上的點 $(t,-6+4t,9-2t)$ 的距離 d 最小時，

$$d=\sqrt{t^2+(-6+4t)^2+(9-2t)^2}=\sqrt{21t^2-84t+117}=\sqrt{21(t-2)^2+33}$$

當 $t=2$ 時，d 為最小。$t=2$ 代入直線 L，得 $D(2,2,5)$ 為面積最小圓的圓心。

【法三】令球心 O 在 L 上的投影點為 D，則 $D(t,-6+4t,9-2t)$。因 $\overrightarrow{OD}$ 與直線 L 的方向向量 $(1,4,-2)$ 垂直，故 $(t,-6+4t,9-2t)\cdot(1,4,-2)=0$

$$\Rightarrow t-24+16t-18+4t=0$$

得 $t=2$，求得圓心 $D(2,2,5)$。

【法四】令球心 O 在 L 上的正射影點為 D，則 $\overrightarrow{PD}$ 為 $\overrightarrow{PO}$ 在 $(1,4,-2)$ 上的正射影向量。

$$\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{PO}\cdot(1,4,-2)}{1^2+4^2+(-2)^2}(1,4,-2)=\frac{(0,6,-9)\cdot(1,4,-2)}{1^2+4^2+(-2)^2}(1,4,-2)$$

$$=\frac{42}{21}(1,4,-2)=(2,8,-4)$$

故 $D(0+2,-6+8,9+(-4))\Rightarrow D(2,2,5)$

（乙）$\overrightarrow{OD}$為所求平面之一法向量，故平面之法向量可取為 $(2,2,5)$ ，或此向量乘一非零常數，平面方程式為 $2(x-2)+2(y-2)+5(z-5)=0$

或 $2(x-1)+2(y+2)+5(z-7)=0$

或 $2(x-3)+2(y-6)+5(z-3)=0$

或 $2x+2(y+6)+5(z-9)=0$

化簡得 $2x+2y+5z=33$ 。