九十七學年度指定科目考試

數學甲選擇題及選填題參考答案

<table>
<tr><th colspan="2">題號</th><th>答案</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>1,3,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>3,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td>1,4</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td>1,2,4,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>1,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td>1,3,5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">A</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1</td></tr>
<tr><td>11</td><td>2</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td>13</td><td>3</td></tr>
<tr><td>14</td><td>9</td></tr>
</table>

※如有疑義，得於 7 月 6 日前，填妥申請表（至本中心網頁下載），傳真至 02-23661365，並於該期限內另以限時掛號郵寄至本中心（郵戳為憑，逾期不予受理）。

97 指考數學甲非選擇題作答情形分析

編者按：97 指考非選擇題評分標準說明系列報導，以數學考科壓軸，為此系列報導畫下句點。本期邀請本中心數學考科兩位學科研究員撰文，提供數學甲、數學乙的非選擇題評分標準說明及考生作答情形分析，請關心高中教育的各界參考。

第一處 朱惠文

表一爲 93 至 97 年數學甲非選擇題得零分及滿分的考生人數與人數百分比。今年非選擇題零分人數百分比爲 28%，僅次於 93 年的 33%。但今年的滿分人數卻是最多的一年，爲 12%。以下嘗試從試題主觀的數學內容，及考生客觀的答題反應，找出爲何今年非選擇題零分與滿分人數均較多的原因，其中有關考生的作答情形，是從參與 97 年數學甲考生群中，隨機抽樣 611 份試卷進行分析。至於各題的正確解法，請詳見選才電子報第 168 期「我的數學科非選擇題得分了嗎？」。

表一、93 至 97 年數學甲非選擇題零分、滿分統計表

年度	零分		滿分	
	人數	百分比	人數	百分比
97	**12,239**	**28%**	**5030**	**12%**
96	7,901	17%	1113	2%
95	2,582	5%	68	0.12%
94	3,910	7%	1278	2%
93	19,211	33%	4627	8%

【第一題題目】

(12 分) 設 $p(x)$ 爲三次實係數多項式函數，其圖形通過 $(1,3),(-1,5)$ 兩點。若 $p(x)$ 的圖形在點 $(1,3)$ 的切線斜率爲 7，而在點 $(-1,5)$ 的切線斜率爲 -5，試求 $p(x)$。

試題統計值：

項目	平均得分〈得分率〉	標準差
統計值	6.54〈54.5%〉	5.49

說明：

本題評量三次實係數多項式函數的圖形與其導數間的關係。正確解題步驟分爲三步，第一步驟爲根據題意假設 $p(x)$ 或 $p'(x)$ ，並將題目所給數值代入，寫出方程式，例如：

設 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，得 $\begin{cases} p(1)=3=a+b+c+d \\ p(-1)=5=-a+b-c+d \end{cases}$

或

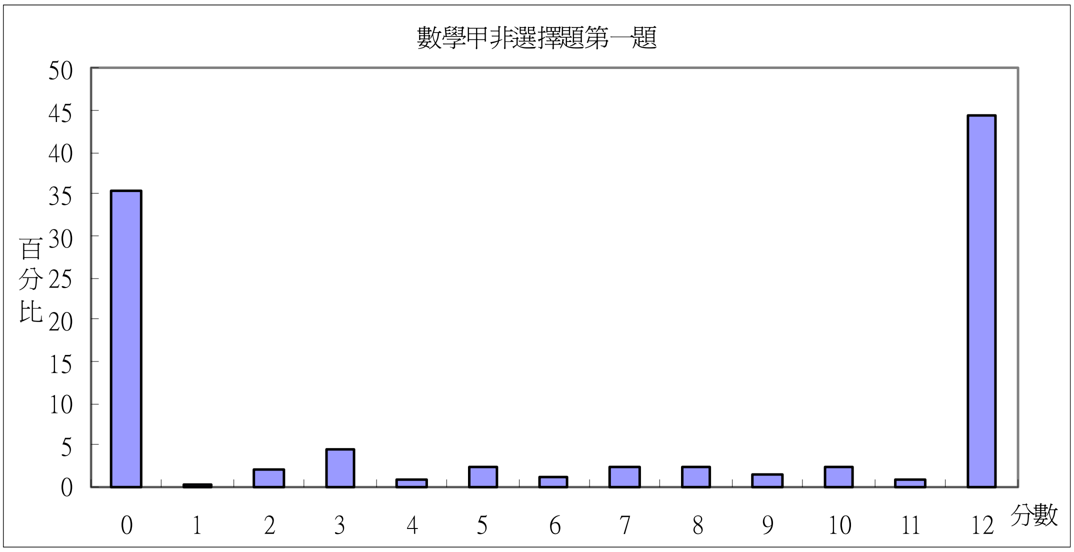
設 $p'(x)=ax^2+bx+c$ ，得 $\begin{cases} p'(1)=7=a+b+c \\ p'(-1)=-5=a-b+c \end{cases}$ ；

亦可利用餘式定理，例如設 $p(x)=(x-1)[(x+1)(kx+q)+r]+3$ 等作法，只要列式正確，即可得到分數。第二步驟則依據前面所設函數進行微分或是積分，再根據題意寫出另兩個方程式，例如：若第一步設 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，將 $p(x)$ 微分，得 $p'(x)=3ax^2+2bx+c$ ，再根據題意得 $\begin{cases} p'(1)=7=3a+2b+c \\ p'(-1)=-5=3a-2b+c \end{cases}$ 。第三步驟爲解第一步與第二步列出的聯立方程式，並寫出正確的 $p(x)=x^3+3x^2-2x+1$ 。分析抽樣卷考生的作答結果（見表二），約 10.1%的考生放棄作答。解法中，以列出 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 居多（約 70%），其中有些考生誤將 $p(x)$ 設成 $p(x)=ax^3+bx^2+c$ 、 $p(x)=ax^3+bx^2+cx$ 、 $p(x)=ax^3+bx+c$ 或 $p(x)=x^3+px+q$ ，這些考生知道要設三次多項式，但並不知道何謂三次多項式，或是因爲粗心，少設了二次項、一次項或是常數項；有些則不清楚多項式函數與多項式方程式的差別，故設成 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ 。至於第二步驟，能寫出正確多項式者，多半能正確的微分與積分，僅有少部分同學不會微分或積分，例如將微分式寫成 $2ax^2+2bx+c$ 、 $2ax^2+2bx$ 、 $3ax+2bx+c$ 。約 62%考生會列出正確的三次多項式、微分，這群考生中，約 10%能列出正確的聯立方程組，但解聯立方程式解時，卻解錯，是很可惜的，約 47.3%考生能完全作對。另外，抽樣考生中有 3 位直接認定 $p(x)$ 的首項係數爲 1，即假設 $p(x)=x^3+bx^2+cx+d$ ，其中有一位同學能寫出正確的四個三元一次聯立方程式，亦得出正確答案，但未說明爲何此三次多項式的首項係數除了 1 以外，沒有其他可能情形，這其實是觀念上的嚴重錯誤，因此即使最後答案正確，仍無法得到全部分數。抽樣考生中，有 34 位同學能求出 b,d 的關係式或是正確的 b 、 d 值，例如列出 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，但進行微分時，誤認爲 $p'(x)=ax^2+2bx+c$ ，此時雖能求出正確的 b 、 d 值，但仍無法寫出完整且正確的 $p(x)$ 。

表二、數學甲非選擇題第一題考生作答情形統計

內容	份數	百分比
未答	62	10.1%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答。	29	4.8%
1.（法一）列出 $p(x)$ 爲三次多項式	432	70.7%
列出正確的三次多項式，如 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 。	414	67.8%
列出三次多項式，但將 a 設爲 1，如 $p(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 。	3	0.5%
列出三次多項式，但 $p(x)$ 的方程式寫錯，例如： (1) $p(x)=ax^3+bx^2+c$ 、 $p(x)=ax^3+bx^2+cx$ 、 $p(x)=ax^3+bx+c$ (2) $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ (3) $p(x)=x^3+px+q$	15	2.5%
列出正確的三次多項式，且微分式正確。	379	62.0%
列出正確的三次多項式，但微分式寫錯，例如： (1) $2ax^2+2bx+c$ 、 $2ax^2+2bx$ 、 $3ax+2bx+c$ (2) $6ax+2b$	5	0.8%
（法二）列出導函數	14	2.3%
列出正確的導函數，如 $p'(x)=ax^2+bx+c$ 。	5	0.8%
列出二次微分多項式，但 $p'(x)$ 的方程式寫錯，例如： (1) $p'(x)=ax+b+c$ 、 $p(x)=ax^2+2bx+c=7$ (2) $p(x)=ax^2+2bx+c=7$ (3) $p'(x)=3ax^2+bx+c$	5	0.8%
列出正確的二次微分項式，且積分式正確。	2	0.3%
列出正確的二次微分多項式，但積分式寫錯，例如： $\frac{a}{3}x^3+3x+cx+d$ ； $\frac{2a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+d$	2	0.3%
（法三）利用餘式定理	4	0.7%
利用餘式定理列出正確的 $p(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)+3=(x-1)[(x+1)(kx+q)+r]+3$	1	0.2%
利用餘式定理，但列錯方程式。 例如： $p(x)=(ax+b)(x+1)(x-1)$	3	0.5%

2. 列出聯立方程組		
將 $p(1)=3$ 且 $p(-1)=5$ 或 $p'(1)=7$ 且 $p'(-1)=-5$ 代入，寫出正確的方程式。	345	56.5%
將 $p(1)=3$ 且 $p(-1)=5$ 或 $p'(1)=7$ 且 $p'(-1)=-5$ 代入，但四個方程式中至少一個列錯。	28	4.6%
3. 解聯立方程組		
解聯立方程式，而且正確。	305	49.9%
解聯立方程式組，但解錯聯立方程式組的解。	34	5.6%
利用兩個 $p'(x)$ 或 $p(x)$ 代值所得的方程式求出正確的 b 、 d 值，但後面不會算了。	33	5.4%
完全正確。	289	47.3%



圖一、數學甲第一題的考生成績分布圖

圖一列出此題的成績分布圖，約 35%考生得 0 分，約 45%考生能得完整的 12 分，能得部分分數的考生約 20%，其中以得 0、2、3、5、7、8、10 與 12 分的考生居多，依據前幾年針對數學科非選擇題所進行的研究[1]，可將各分數所對應的考生能力群區分如下：

得 0 分者：不知如何下手作答

得 3 分者：正確列出三次多項式或二次多項式，並將 $p(1)=3$ 且 $p(-1)=5$ 或 $p'(1)=7$ 且 $p'(-1)=-5$ 代入多項式。

[1] 陳天進、賴恆隆、劉明郎、黃漢水、洪有情、朱惠文、陳慧美(2007)。指定科目數學考科非選擇題試題研發計畫。臺北市：大學入學考試中心。

得 5 分者：正確將所列的三次多項式，或二次多項式，進行微分或積分。

得 7~8 分者：正確將 $p(1)=3$ 且 $p(-1)=5$ 或 $p'(1)=7$ 且 $p'(-1)=-5$ 代入所列的微分或積分式。

得 10 分者：正確列出四個聯立方程組並求解此方程組的解

得 12 分者：能夠確實且完整作答整個解題過程

本題爲微積分單元中的基本試題，答案討論會議時，參與會議的高中老師提出此題爲坊間參考書籍常見的例題，考生若平常常做練習，應不難下筆作答。由圖一亦可印證。

【第二題題目】

設 ΔABC 的三高分別爲 $\overline{AD}=6$ 、 $\overline{BE}=4$ 、 $\overline{CF}=3$ 。

(1) (6 分) 試證： ΔABC 是一鈍角三角形。

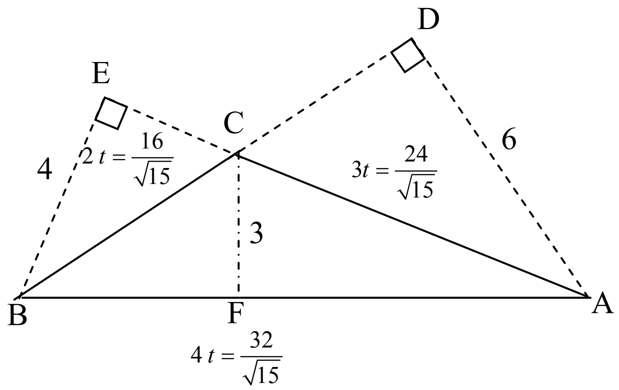
(2) (8 分) 試求 ΔABC 的面積。

試題統計值：

項目	平均得分〈得分率〉	標準差
統計值	3.84〈27.4%〉	5.04

說明：

本題分爲兩小題，第一小題證明 ΔABC 是一鈍角三角形，正確解法爲利用三角形面積爲 $\frac{1}{2}$(底×高)，求出三邊長的比例，即 ΔABC 的面積等於 $\frac{1}{2}(\overline{BC}\cdot\overline{AD})=\frac{1}{2}(\overline{AB}\cdot\overline{CF})=\frac{1}{2}(\overline{AC}\cdot\overline{BE})$〈見圖二〉。



圖二

故三邊長的比例 $\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\frac{1}{\overline{AD}}:\frac{1}{\overline{BE}}:\frac{1}{\overline{CF}}=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=2:3:4$ 。再利用兩邊邊長的平方和小於第三邊邊長的平方，即 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2<\overline{AB}^2$ 或 $(2t)^2+(3t)^2<(4t)^2$ ；或由餘弦定理得 $\cos C=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=\frac{-1}{4}<0$ ，證明 ΔABC 是一鈍角三角形。觀察抽樣考生的作答結果（見表三），採用餘弦定理證明的考生居多。若進一步分析考生可能犯的錯誤，發現有些會利用三角形

的面積推得三角形的邊長與高成反比，但比例算錯，例如誤算$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=2:3:6$；或是誤認為求出的三邊比例即為三邊的邊長；或是邊長與高對應錯誤，例如$\overline{BC}\cdot\overline{CF}=\overline{AD}\cdot\overline{CA}$，但能得到$2:3:4$。證明鈍角三角形過程中，有些考生誤以為三高即為三邊長，例如認定$\overline{BC}=2$，$\overline{CA}=3$，則$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2^2+3^2<4^2$；或誤將不等式方向寫錯，例如將$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2<\overline{AB}^2$誤寫成$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2>\overline{AB}^2$，或利用餘弦定理進行運算時，算錯餘弦值，例如誤得$\cos C=\frac{-1}{5}$等等。另外，部分考生一開始就假設$\Delta ABC$是一鈍角三角形，再利用$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2<\overline{AB}^2$證明其為鈍角三角形，這群考生知道甚麼是鈍角三角形，但不清楚充分與必要條件間的關係，即其數學論證能力方面仍有待加強。以上這些考生雖然都以為說明了ΔABC是一鈍角三角形，但論證過程有誤，均只能得到部份分數甚或沒有分數。抽樣考生中，約25.5%能完全作對，約37.0%可以正確作對第一步驟。

表三、數學甲非選擇題第二題第(1)小題考生作答情形統計

內容	份數	百分比
未答	190	31.1%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答。	82	13.4%
1. 計算三邊長的比例		
正確利用$\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{CA}\cdot\overline{BE}=\overline{AB}\cdot\overline{CF}$ 得$\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=\frac{1}{\overline{AD}}:\frac{1}{\overline{BE}}:\frac{1}{\overline{CF}}=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=2:3:4$。	226	37.0%
算錯三角形三邊邊長比例，例如：	2	0.3%
(1)將三高誤以為三邊長	2	0.3%
(2)對應錯誤，例如$\overline{BC}\cdot\overline{CF}=\overline{AD}\cdot\overline{CA}$ 得$\overline{BC}:\overline{CA}=\frac{1}{\overline{CF}}:\frac{1}{\overline{AD}}$但能得到$2:3:4$。	5	0.8%
(3)化簡$\frac{1}{6}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}$錯誤，例如$\frac{1}{6}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=4:5:2$。 (4)直接給定錯誤的邊長值，例如$\overline{AB}=8$、$\overline{CA}=6$等等。	3	0.49%
2. 證明ΔABC是一鈍角三角形		
（法一）利用兩邊邊長的平方和小於第三邊邊長的平方和，即$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2<\overline{AB}^2$或$(2t)^2+(3t)^2<(4t)^2$或$2^2+3^2<4^2$證明正確。	65	10.6%
將$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2<\overline{AB}^2$寫成$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2>\overline{AB}^2$，不等式方向寫錯。	1	0.2%

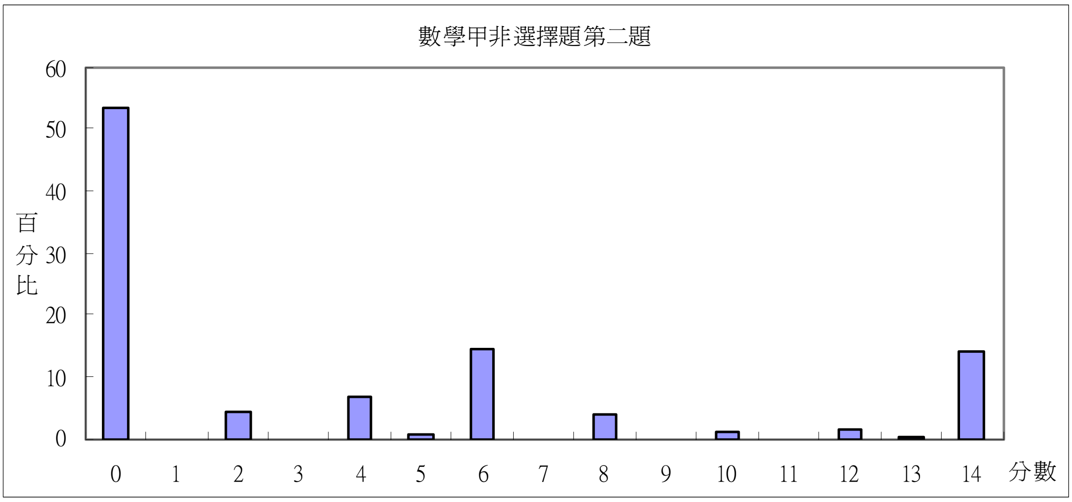
（法二）利用餘弦定理證明，且過程正確。	133	21.8%
利用餘弦定理算得 $\cos C$ 的值，但值算錯。	3	0.5%
利用餘弦定理算得正確 $\cos C$ 的值，但未寫小於 0，直接寫 ΔABC 爲鈍角三角形。	1	0.2%
直接假設 ΔABC 是一鈍角三角形， 再利用 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2<\overline{AB}^2$ 證明其爲鈍角三角形。	17	2.8%
完全正確	156	25.5%
其他	10	1.6%

第二小題求 ΔABC 面積的解法很多，大致可分爲以下兩步驟，第一步驟求出三邊的邊長，第二步驟算出三角形的面積。第一步驟可利用高與邊長的關係，例如 $\overline{BE}=\overline{BC}\cdot\sin C$，即 $4=2t\sin C$；或海龍公式 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{(\frac{9}{2}t)(\frac{5}{2}t)(\frac{3}{2}t)(\frac{1}{2}t)}=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{BC}$；或畢氏定理，例如 $\overline{BF}^2+\overline{CF}^2=\overline{BC}^2$、$\overline{AF}^2+\overline{CF}^2=\overline{AC}^2$，列出數個方程式，或是定坐標的方法，這些作法均可求得三角形的邊長。第二步驟直接將所求得的邊長套用三角形面積公式即可得出正確答案。表四爲分析 611 位抽樣考生作答的結果，爲歸納考生作答的錯誤類型，將第一步驟再細分爲列出三角形面積、利用兩個面積公式列出正確的等式與根據前面所列等式正確求解（見表四）等三個加以討論。抽樣考生中，約 38%放棄作答，即完全不知如何下筆作答。能作答的考生中，以用正弦求三角形面積的考生居多，用此解法的考生，有些會求得三邊長的比例爲 $2:3:4$，但三角形邊長與高對應錯誤，因而算錯面積，例如 $\overline{BE}=\overline{BC}\cdot\sin B$；或直接令 $\overline{AB}=8$、$\overline{CA}=6$、$\overline{BC}=4$，算得三角形的面積。約 6%考生利用正確的海龍公式解題，其中有些考生的公式寫錯，例如誤將公式記爲 $\frac{1}{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 或是 $s\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$。至於第二步驟，利用兩個面積公式列出正確的等式的過程中，考生犯的錯誤的可能情形是誤以爲三角形面積爲底×高；或化簡時計算錯誤；例如 $\frac{1}{2}\times 3\times 4k=\frac{6}{2}k$。這些考生，不是不會算，而是解題時不仔細，是很可惜的。抽樣 611 位考生中，約 14.6%能完全作對。

表四、數學甲非選擇題第二題第(2)小題考生作答情形統計

內容	份數	百分比
未答	232	38.0%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答。	93	15.2%
直接設 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 爲， $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{CA}=6$ 、 $\overline{BC}=4$ 等。	59	9.7%
1. 求三角形的邊長		
(1) 列出三角形面積公式		
（法一）利用餘弦求正弦，再利用正弦表示三角形面積或高		
利用餘弦值，求得正弦值，例如： $\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ （或 $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ 或 $\sin B=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$ ）。	91	14.9%
利用正確的正弦，寫出高的關係式，例如 $\overline{BE}=4=2t\sin C$ ，且式子正確。	21	3.4%
利用正確的正弦，算得 ΔABC 的面積，例如 $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin C$ 。	79	12.9%
利用正弦值求面積，但底與高對應錯誤，例如 $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin B$ 。	1	0.2%
（法二）利用海龍公式算面積		
利用海龍公式算面積，且海龍公式和代值完全正確。	35	5.7%
利用海龍公式求面積，但公式背錯，例如：(1) $\frac{1}{2}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ；(2) $s\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ ；(3) $\frac{4}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	6	1.0%
寫出正確的海龍公式，但代值時發生錯誤。	20	3.3%
（法三）利用畢氏定理做法		
利用畢氏定理做法，且列式正確，例如： $\overline{BF}^2+\overline{CF}^2=\overline{BC}^2$ 。	10	1.6%
（法四）解析幾何做法	1	0.2%

(2) 利用兩個面積公式列出正確的等式		
利用兩個面積公式列出正確的等式，例如： $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin C$ 或$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CF}$等，且列式正確。	83	13.6%
利用兩個面積公式列出等式，但列式錯誤，例如： (1) 誤以爲三角形面積爲底×高 (2) 誤以爲高也是比例；設高爲 6m (3) 化簡時，計算錯誤；例如$\frac{1}{2}\times 3\times 4k=\frac{6}{2}k$	6	1%
(3) 根據前面所列等式正確求解（任何做法均一樣）		
根據前面所列等式，求解正確	75	12.3%
根據前面所列等式，求解錯誤。	16	2.6%
2. 算出三角形面積		
完全正確	89	14.6%
前面參數算對，但代入 ΔABC 面積算錯，或根號化簡錯誤。	5	0.8%
其他，例如：由 $\cos A$, $\cos B$ 求出 $\tan A$, $\tan B$ ，而得出 $\overline{AE}$ 。	9	1.5%



圖三、數學甲第二題的考生成績分布圖

圖三列出此題的成績分布圖，約 55%考生得 0 分，僅約 15%考生能得完整的 14 分，能得部分分數的考生約 30%，其中以得 0、2、4、6、8、10、12 與 14 分的考生居多，將各分數所對應的考生能力群區分如下：

得 0 分者：不知如何下手作答。

得 2 分者：正確利用邊長與高的反比關係，寫出三邊長的比例。

得 4 分者：正確利用三角形兩邊邊長的平方和小於第三邊邊長的平方；或餘弦定理。

得 6 分者：確實且完整說明 ΔABC 是一鈍角三角形。

得 8 分者：正確表示三角形面積，例如正弦、海龍公式、畢氏定理等。

得 10 分者：正確列出兩個三角形面積的等式。

得 12 分者：正確求解所列出的等式。

得 14 分者：能夠確實且完整作答整個解題過程。

本題爲三角函數單元的基本試題，但是亦能用國中已修習過的數學知識解題，例如畢氏定理，只是計算較爲複雜。答案討論會議時，參與會議的高中老師提出此題爲坊間參考書籍常見的例題，考生若平常常做練習，應不難下筆作答。但由成績分布圖發現並非如此，約 55%考生得零分，分析抽樣考生亦顯示約 38%放棄作答，即看到試題完全不知如何下筆作答，建議第一題若能先請考生算三邊長的比例，也許較證明鈍角三角形更具提示作用。

綜觀今年數學甲兩題非選擇題，雖然都是坊間參考書籍或是課本常見的例題，但均是評量該單元重要且基本的概念，例如第一題多項式的微分與積分，第二題餘弦定理、三角形面積的應用等等。考生若熟讀該單元課程，上課注意聽講、並自我練習課本例題或習題，應不難下筆作答，不過考生作答情形並沒有預期中的理想。以第一題爲例，有些考生不清楚何謂三次多項式，且不了解多項式與方程式的差別，這些均爲修習第一冊多項式單元時，很基本而且重要的概念。建議考生平常修習數學時，應從了解該單元的基本定義或概念著手，並練習課本的例題或習題，從解題的過程中，可了解自己概念不清楚的地方，同時可請教師長，以修正自己的錯誤。