九十六學年度指定科目考試

數學甲選擇題及選填題參考答案

題號		答案
1		1
2		4
3		5
4		1345
5		34
6		235
7		245
8		345
A	9	5
	10	2
	11	1
B	12	1
	13	0
	14	—
	15	6
	16	9
C	17	1
	18	2

※如有疑義，應書明科目、題號及理由並於 7 月 6 日前傳真至 02-23661365，且於該期限內另以限時掛號郵寄至本中心(郵戳為憑，逾期不予受理)。

96 指考數學甲、數學乙 非選擇題作答情形分析

編者案：96 指考非選擇題評分標準說明系列報導，以數學考科壓軸，為此系列報導畫下句點。本期邀請本中心數學考科兩位學科研究員撰文，提供數學甲、數學乙的非選擇題評分標準說明及考生作答情形分析，請關心高中教育的各界參考。

第一處 朱惠文 陳慧美

96 年指定科目考試數學甲與數學乙的考試題型可分爲：選擇題、選填題與計算證明題。其中計算證明題主要是評量考生能否陳述解題時的論證過程，以及數學表達能力。因此，爲瞭解學生於非選擇題上的推理過程，我們抽樣了數學甲 800 份、數學乙 876 份的非選擇題答案卷，來瞭解考生的解題概念與想法，並配合 96 年數學甲、數學乙全體考生在非選擇題的得分情形來分析。下面將分別對 96 年數學甲與數學乙非選擇題部分，來說明學生解題時可能出現的作答類型。

數學甲

表一爲 91 至 96 年數學甲非選擇題得零分的考生人數與人數百分比。除 92 年因爲 SARS 取消非選擇題以外，今年非選擇題零分人數較 94、95 年多，但比 91、93 年少，表示部分學生對今年試題不知如何下筆作答。以下嘗試從試題主觀的數學內容，及考生客觀的答題反應，找出爲何今年零分人數較多的原因，其中有關考生的作答情形，是從參與 96 年數學甲考生群中，隨機抽樣 800 份試卷進行分析。

表一、91 至 96 年數學甲非選擇題零分統計表

年度	人數	人數百分比
91	11585	22%
92	無	
93	19211	33%
94	3910	7%
95	2582	5%
96	**7901**	**17%**

【第一題題目】

設 $f(x)=x^3-6x^2-x+30$，且 a,b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根。

(1) (3 分) 求解三次方程式 $f(x)=0$。

(2) (8 分) 若 ΔABC 中，$\overline{AC}=a,\ \overline{BC}=b,\ \angle ACB=120^{\circ}$，且 D, E 是 $\overline{AB}$ 上兩點，滿足 $\overline{BD}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{AC}$，試求 ΔCDE 的面積。

【說明】

本題爲一題組，題幹先說明a,b是方程式$f(x)=0$的兩正根，第 1 小題爲解三次方程式$f(x)=0$的根，第 2 小題則將第 1 小題所算出的根代入第 2 小題。

第 1 小題可利用牛頓一次因式檢驗法，例如寫出可能的有理根爲±1、±2、±3、±5、±6、±10、±15、±30。得出其中一根後，再利用長除法或綜合除法得出其他的根；或是將$f(x)$進行因式分解，例如直接寫出$(x+2)(x^2-8x+15)$，這兩個解法均爲高一所學的基本知識及應用。表二爲 800 份考生抽樣卷作答結果，約 49%考生採用因式分解方法，即寫出$(x+2)(x^2-8x+15)$的方式作答，但有極少數考生是利用根與係數的關係求解，如列出$a+b+c=6$，這群考生可能誤以爲此題與大考中心於 96 年 5 月上網的研究用試卷類似，所以才以根與係數觀念解答。從表二可看出約 60%的考生能完全作對。分析考生的作答情形，發現採用因式分解的考生，約 13%作答錯誤，其中有些考生未能分解完成，例如只寫出$f(x)=(x-3)(x^2-3x-10)$或因式分解錯誤，例如$f(x)=(x-2)(x-3)(x+5)$，另外，有些只寫出$f(x)=(x+2)(x-3)(x-5)$，但未寫出$x=-2,3,5$，或是只寫兩正根$3,5$，這些考生不是不會，而是未能完整表達整個解題過程。而採牛頓一次因式檢驗法的考生中，有些只寫出$f(3)=0$，或是$f(-2)=0$、$f(3)=0$、$f(5)=0$，與只作答$f(x)=(x+2)(x-3)(x-5)$犯了同樣的錯誤，即未明確寫出試題所要的答案。但清楚而且完整表達解題過程，是指考測驗目標，也是高中修習數學課程，應逐步培養的能力之一。

表二、第一大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	159	20%
不知如何下筆作答或是亂答	94	12%
利用有理根或牛頓一次因式檢驗法，例如 $f(5)=0$	173	22%
利用因式分解或餘式定理	393	49%
完全正確	480	60%

第 2 小題是利用第 1 小題算出的兩正根$3,5$，代入得$\overline{AC}=3$、$\overline{BC}=5$，或$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=3$，再求ΔCDE的面積，此題的解法可分為三步驟：

(1) 求ΔCAB的面積

(2) 利用餘弦定理求$\overline{AB}$

(3) 求出$\overline{DE}$

第 1 步驟求ΔCAB的面積，最直接的方法就是正弦定理，當然也可利用海龍公式。表三為分析 800 份考生作答結果，約 22%知道求ΔCAB的面積，其中約 83%的考生利用正弦定理作答。至於第 2 步驟利用餘弦定理得$\overline{AB}$，由表三可知約 39%的考生知道利用餘弦定理算出$\overline{AB}$的長度，其中約 9 成可以完全作對。正弦、餘弦定理是高中三角函數課程必學的基本數學知識，觀察抽樣卷考生的作答情形，結果發現約 16%的考生會用餘弦定理，但不會用正弦定理或是公式記錯，約 3%的考生會用正弦定理，但不會用餘弦定理或公式記錯，顯示考生較熟悉餘弦定理甚於正弦定理，可能因為餘弦定理容易流於程序性知識，正弦定理則著重於觀念的應用。對照歷年試題，評量餘弦定理試題的答對（得分）率多數高於正弦定理。至於第 3 步驟則利用試題所給條件$\overline{AE}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{BC}$，與由餘弦定理算出的$\overline{AB}$，推得$\overline{DE}=1$，再加上$\Delta CDE$與$\Delta CAB$異底同高，得$\frac{\Delta CDE}{\Delta CAB}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\frac{1}{7}$。由表三得知約 14%的考生能正確算出$\overline{DE}=1$，並推得$\Delta CDE=\frac{1}{7}\Delta CAB$，約 12%的考生雖能得出$\overline{DE}=1$，卻無法推得$\Delta CDE$與$\Delta CAB$的關係。能完全作對的考生約 19%。事實上，本題的解法有很多種，以下列出除上述作法以外，考生抽樣卷所採用的作法：

(1) 利用餘弦定理算出$\cos A$、$\cos B$，再算出$\sin A$、$\sin B$後，利用$\Delta CDE=\Delta BCD+\Delta ACE-\Delta ABC$

(2) 利用餘弦定理算出$\cos A$後求出$\overline{CE}$，$\cos B$求出$\overline{CD}$，再求出$\cos\angle CED$，再算$\Delta CDE=\frac{1}{2}\overline{CE}\times\overline{DE}\times\sin\angle CED$

這兩個作法均用到二次以上的餘弦定理，計算量不少，一不小心，很容易計算錯誤。

表三、第一大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	160	20%
不知如何下筆作答，或是隨意亂答	89	11%
知道求 ΔCAB 的面積	221	28%
(1)利用正弦定理，且計算正確	183	23%
(2)利用海龍公式，或其他方法，且計算正確	10	1%
(3) $\sin 120^{\circ}$ 算錯或是面積公式算錯，例如例如少 $\frac{1}{2}$ 或是海龍公式背錯，與其他錯誤	26	4%
知道利用餘弦定理算得 $\overline{AB}$ 的長度	311	39%
(1)利用餘弦定理，且計算正確	284	36%
(2)餘弦定理公式背錯或是 $\cos 120^{\circ}$ 算錯，與其他錯誤	26	3%
能正確算出 $\overline{DE}=1$，並推出 $\Delta CDE=\frac{1}{7}\Delta CAB$	111	14%
能正確算出 $\overline{DE}=1$，但無法推出 $\Delta CDE=\frac{1}{7}\Delta CAB$	94	12%
計算 ΔCDE 的面積	183	23%
利用 ΔCAB 的面積	125	16%
算出 ΔCAB 的高	47	6%
完全正確	152	19%

另外，此題的試題設計類似 TRML(Taiwan Regions Mathematics League 台灣區高中數學競賽)或 ARML(American Regions Mathematics League 美國高中數學聯盟)接力賽的命題方式，一題分成二個不相關的小題，將第 1 小題的答案寫成已知條件，再傳給第 2 小題。由考生抽樣卷，亦發現有些考生不是不會寫，而是沒注意試題的第一句話「 a,b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根」，而求得 $\overline{AB}=\sqrt{a^2+ab+b^2}$ ，$\Delta ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$。答案討論會議時，與會的大學教授與高中老師認爲第 2 小題主要評量考生是否能依題意畫出相關圖形，並找出相關解題策略，例如正弦、餘弦定理等解決問題，與第 1 小題是否會解方程式的根並不相同。試題的接力賽設計方式導致考生即使第 2 小題的觀念正確，但仍因第 1 小題錯誤而沒有拿到分數。非選擇題以題組方式命製的用意爲提示某個關鍵的解題步驟，鼓勵考生盡量作答非選擇題，但此題並非如此，抽樣卷結果亦呈現放棄第 1 小題與第 2 小題的人數差不多，約 20%。

圖一列出此題的成績分佈圖，以得 0、3、6、9 與 11 分的考生居多，依據今年非選擇題試題研發計劃的研究，將各分數所對應的考生能力群如下：

得 0 分者：不知如何下手作答

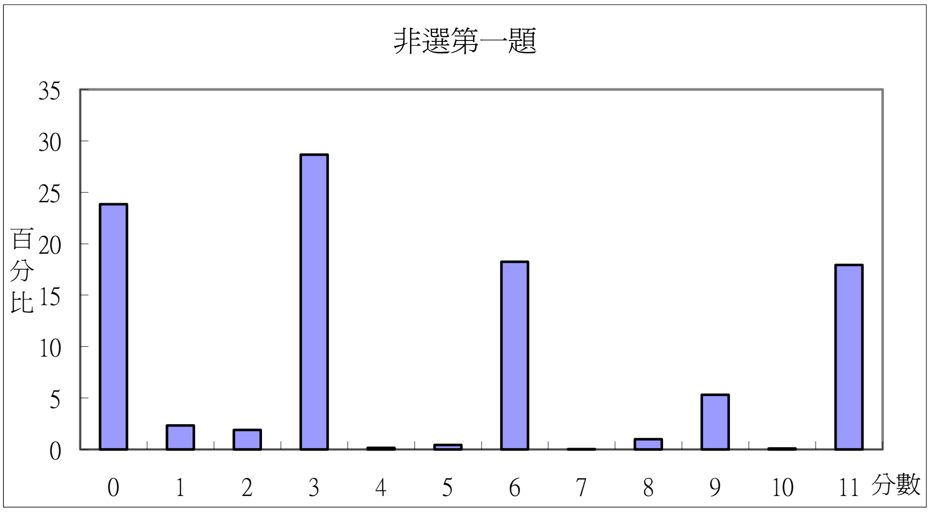
得 3 分者：可以正確解方程式的根、或正確利用正弦定理、或正確利用餘弦定理解題

得 6 分者：可以正確解方程式的根、利用正弦定理、利用餘弦定理中的兩項

得 9 分者：可以正確解方程式的根、利用正弦定理、利用餘弦定理

得 11 分者：能夠確實且完整作答整個解題過程

由以上敘述可知此題對於鑑別考生各群能力方面，相當不錯。得零分的考生約 25%，3 分考生約 30%，約 19%能完全作對。



圖一　第一題的考生成績分佈圖

【第二題題目】

設 ΔABC 的三頂點坐標分別為 $A(-2,7,15)$、$B(1,16,3)$、$C(10,7,3)$。

(1) (5 分) 試求通過 A、B、C 三點的平面方程式。

(2) (5 分) 試求 ΔABC 的外心坐標。

【說明】

第二題評量空間三角形的外心坐標。有關外心為三角形三邊中垂線交點的定義屬於國中課程的範疇，坊間參考書籍或前幾年試題常出現評量平面一三角形的外心坐標，很少看見求空間中一三角形的外心坐標。考生若仿平面上解外心坐標的方法，如外心到三頂點等距離，可能會忽略外心坐標必須在該三角形所在平面的性質，命題者可能想要提示這個關鍵的解題概念，因此第 1 小題是求通過 A、B、C 三點的平面方程式，第 2 小題才是求 ΔABC 的外心坐標。

第 1 小題有以下幾個方法求出平面方程式：

(1) 設平面法向量為 $\overrightarrow{N}=(l, m, n)$，利用平面上的直線向量與法向量垂直的性質，寫出 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{N}=0$ 與 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{N}=0$，解聯立方程式得 $\overrightarrow{N}=(1,1,1)$，或是利用外積得 $\overrightarrow{N}=(\begin{vmatrix}3 & -4\\0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{vmatrix})$。

(2) 設平面方程式為 $ax+by+cz=d$，將 A、B、C 三點代入解聯立方程組。

(3) 設通過 A、B、C 三點的平面方程式為 $\begin{vmatrix}x-(-2) & y-7 & z-15\\1-(-2) & 16-7 & 3-15\\10-(-2) & 7-7 & 3-15\end{vmatrix}=0$

(4) 觀察 A、B、C 三點的坐標分量和即是 20，所以通過 A、B、C 三點的平面方程式為 $x+y+z=20$

分析 800 份考生抽樣卷（見表四）發現，約 57%是直接寫出法向量為 $(\begin{vmatrix}3 & -4\\0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{vmatrix})$，這群考生中，約 20%作答錯誤，其原因歸類如下：

(1) 不會向量的基本運算或是粗心算錯，例如將 $\overrightarrow{AB}=(3,9,12)$ 寫成 $\overrightarrow{AB}=(3,-9,-12)$。

(2) 求外積時計算算錯，例如算成 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(3,5,3)$。

(3) 能正確算出 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，但將其中一點代入求平面方程式時，卻計算錯誤或誤認平面必過原點，例如寫出 $x+y+z=0$ 或 $x+y+z=14$。

少數考生會假設方程式為 $ax+by+cz+d=0$，但不會解 a、b、c、d 或代入 A、B、C 三點時，計算錯誤。以上這些考生並不是不曉得如何解題，而是知道該從哪個方向及用哪些概念或技巧解題，但因不熟悉各概念的基本定義，而作答錯誤，真是可惜。由表四亦得知約 24%考生放棄作答，約 50%能完全作對。

表四、第二大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	191	24%
不知如何下筆作答或亂答	98	12%
(法一)利用法向量，即寫出 $\overline{AB}\cdot\overline{N}=0$ 及 $\overline{AC}\cdot\overline{N}=0$	12	2%
利用法向量，但法向量算錯	3	25%
(法二)利用外積，即寫出法向量為($\begin{vmatrix}3 & -4\\0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{vmatrix}$)	453	57%
利用外積，但答案算錯	98	12%
(法三)將 A、B、C 三點代入，得聯立方程組	28	4%
將 A、B、C 三點代入，但答案算錯	12	2%
(法四)直接用行列式，即 $\begin{vmatrix}x+2 & y-7 & z-15\\3 & 9 & -12\\12 & 0 & -12\end{vmatrix}=0$	26	3%
直接用行列式，但答案算錯	7	1%
利用其他做法	9	1%
完全正確	396	50%

第 2 小題求外心坐標的方法有以下 2 種：

(1) 直接用外心到三頂點等距離，寫出 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 的數學式。

(2) 利用外心在三角形三邊中垂線所構成平面的交線上，推得 $\overline{AB}$ 的中垂線爲 $3x+4y-4z=0$，$\overline{AC}$ 的中垂線爲 $x-z=-5$，或是寫出 $\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

分析 800 份抽樣卷結果，約 70%放棄作答或不知如何下手作答。能下筆作答者，多半是利用外心到三頂點等距離的觀念，有些考生會列出 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，但化簡時計算錯誤。事實上，不管是採取哪一個作法，最後還需加上 $x+y+z=20$ 才能解出答案。觀察抽樣卷考生的作答狀況，發現知道如何下筆作答的考生中，約 42%沒有考慮外心在過三點所構成的平面的條件，而列出了 3 個不正確的數學式，當然亦解錯了外心坐標。雖然命題者嘗試在第 1 小題引導考生往這個方向思考，但由考生的反應，可看出並沒有發揮功用。

表五、第二大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	186	23%
不知如何下筆作答或亂答	361	45%
(法一)利用外心到 3 點距離相等	132	17%
利用外心到 3 點距離相等，但答案算錯	40	5%
(法二)利用中垂面的做法，或是線之中點到外心的向量與直線垂直	45	6%
利用中垂面的做法，但答案算錯	22	3%
(法三)利用投影，得 $\overline{AZ}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\right\|^2$	17	2%
利用投影，但計算錯誤	10	1%
算成重心坐標、內心坐標或垂心	65	8%
缺 $x+y+z=20$	105	13%
完全正確	44	6%

本題將考生所熟悉的平面幾何概念推廣到三度空間，評量考生是否能將平面上所用的解題概念推廣到三度空間，由考生的作答反應可發現空間圖形的思考及空間平面與直線間的關係仍是高中課程難度較高的部分。

圖二列出此題的成績分佈圖，以得 0、5、7 與 10 分的考生居多，依據今年非選擇題試題研發計劃的研究，將各分數所對應的考生能力群如下：

得 0 分者：不知如何下手作答

得 5 分者：可以求出正確的平面方程式

得 7 分者：可以求出正確的平面方程式，並能用正確數學式表達外心坐標的定義

得 10 分者：能夠確實且完整作答整個解題過程

由以上敘述可知此題對於鑑別考生各群能力方面，相當不錯。得零分的考生約 40%，5 分考生約 30%，僅約 6%能完全作對。