

九十五學年度指定科目考試
數學甲選擇題參考答案

題號		答案
1		1
2		4
3		3
4		3,4,5
5		2,3,4
6		2,4,5
A	7	—
	8	7
	9	8
B	10	2
	11	9
C	12	4
	13	—
	14	3
	15	—
	16	9
	17	7
D	18	5
	19	9
	20	—
	21	1
	22	9
E	23	5
	24	3

※如有疑義，應書明科目、題號及理由並於7月8日前傳真至02-23661365，且於該期限內另以限時掛號郵寄至本中心(郵戳為憑，逾期不予受理)。

95 指定科目考試

數學甲及數學乙之非選擇題作答情形

編者案：承續前三期，介紹 95 指定科目考試各科非選擇題的評分原則與其說明，本期選才電子報刊登數學甲及數學乙非選擇題的考生作答情形。為瞭解考生在解題過程中所使用的概念與想法，每年大考中心均會針對數學甲及數學乙的非選擇題進行抽樣，並對所抽樣之答案卷進行作答情形分析，從中探究學生可能的迷思概念與錯誤類型，以提供給高中教師參考。

■第一處 朱惠文、陳慧美

95年指定科目考試數學甲與數學乙的考試題型可分為：選擇題、選填題與計算證明題。其中計算證明題主要是評量考生能否解題時的論證過程，以及數學表達能力。因此，為瞭解學生於非選擇題上的推理過程，我們抽樣了數學甲1423份、數學乙1433份的非選擇題作答卷，來瞭解考生的解題概念與想法，並配合95年數學甲、數學乙全體考生在非選擇題的得分情形來分析。下面將分別對95年數學甲與數學乙非選擇題部分，來說明學生可能出現的錯誤觀念。

數學甲

表一列出91至95年數學甲非選擇題得零分的考生人數及人數百分比。由表一可看出，95年的零分人數為2582人，百分比為5%，與94年的零分人數相差不多，可能是因為各題內均放了兩題引導題。另外，再由表二可知，今年非選擇題滿分人數是最少的，與91年相差不大。但91年有一題是證明題，評量考生推理論證的能力，與今年不大相同。以下將就95年數學甲非選擇題抽樣考生(1423份)的作答情形，與全體考生非選擇題的得分情形來分析。

表一 91至95年數學甲非選擇題零分人數統計表

年度	人數	百分比
95	2582	5%
94	3910	7%
93	19211	33%
92	無	
91	11585	22%

表二 91至95年數學甲非選擇題滿分人數統計表

年度	人數	百分比
95	68	0.12%
94	1196	2.06%
93	4597	7.78%
92	無	
91	345	0.67%

第一題題目：

- (1) (3分) 將 48510 分解成質因數的乘積。
- (2) (7分) 寫出在 1 和 250 之間且與 48510 互質的所有合數(合數就是比 1 大而不是質數的整數)。

本題分為兩小題，從測驗目標的角度來看，第一小題評量考生是否了解何謂質因數，以及將一正整數進行質因數分解；第二小題則評量考生是否能讀懂試題內有關「合數」的定義，並能連結有關質因數的概念解題。以此觀點來看，第一小題的用意是希望協助考生作答第二小題時，能從質因數的想法開始進行，而不是用列舉刪除的方法解題。表三隨機抽樣1423份考生第一小題的作答情形。將近六成的考生可以正確寫出48510的質因數乘積，可能是因為本題為課本或是坊間參考書籍常見的練習題，而且是高一上學期修習的

課程。不過約1%的考生雖然得出正解，但將試題中質因數乘積誤解成將質因數相乘，而得2310，以及約2%的考生可利用短除法寫出正確的因數分解過程，但是卻無法將其轉換成質因數乘積，這群考生均是知道如何進行質因數分解，但是卻因誤解題意或沒有轉換成正確的數學式，而沒有得到分數，實屬可惜。

表三 第一大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

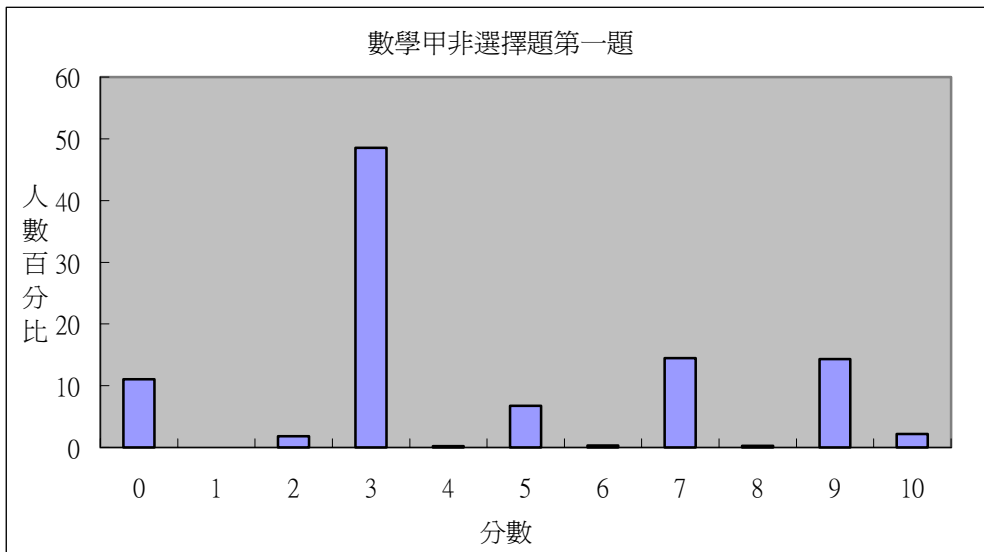
第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	14	1.0
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	6	0.4
未列過程，直接寫答案。	296	20.8
質因數分解不徹底，答案中仍有合數。	43	3.0
過程正確(例如利用短除法)，但答案表示錯誤(未列或列錯或多餘加註)。	35	2.5
分解錯誤(如寫成 $2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11$ 或 $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$ 或 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$)	61	4.3
其他錯誤。	24	1.7
誤解「將一數分解為質因數乘積」的意義，將答案寫為 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ ，或正確表示之後再加寫此式，或其他。	22	1.5
完全正確。	845	59.4

至於第二小題，考生如果若能將試題內有關「合數」指的是比1大而不是質數的整數的說明，解讀成「合數」可分解成質因數的乘積，再加上需與48510互質，可得答案可能是 13^2 、 13×17 、 13×19 、 $17^2 \dots$ 等等。因為試題要求介於1和250之間，得答案只有 13^2 、 13×17 、 13×19 。表四抽樣生本小題的作答情形。約 $\frac{1}{4}$ 的考生放棄作答，約 $\frac{1}{5}$ 的考生不知如何下手，只有一成的考生知道可以從質因數下手解題，但是這些考生中，約一半的考生少考慮了範圍的界定，或是質因數少算了13或17，使得真正做對的考生只有4%。多半的考生能寫出 13^2 、 13×17 、 13×19 中的兩個，但是漏寫了一個，或是多寫了 11×13 ；當然也有考生直接在試卷上寫出1至250的數字，再將與48510不互質與質數逐個刪除，不過採用這個解法的考生，因為需排除的數字個數相當多，幾乎沒有人完全做對。

表四 第一大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	359	25.2
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	266	18.7
未列過程，或說明理由牽強，但答案部分正確或完全正確。	424	29.8
利用列舉法(刪除法)，但列舉錯誤。	132	9.3
利用互質的觀念，說出所求合數的質因數特質，但漏列或多列答案。	73	5.1
利用互質的觀念，說出所求合數的質因數特質，也寫出三個正確答案。但乘積錯誤，如 13^2 寫成 199。	1	0.1
其他錯誤。	2	0.1
完全正確。	61	4.3

圖一為全體考生本題的得分情形。近五成的考生可以得到三分，而得七分與九分的考生均約15%。僅約3%的考生本題可以得到滿分。從表三與表四的分析可以看出，至少約二成的考生並沒有列出解題的過程或是寫出理由，而直接寫出答案，例如第一小題，直接寫 $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$ ；第二小題直接寫 13^2 、 13×17 、 13×19 。這樣直接寫答案，沒有寫出過程的方式，並不符合計算證明題的要求。試卷內有關計算證明題的作答說明詳述「同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。」而且非選擇題主要評量考生是否能用數學語言表達解題過程的能力，並從考生解題的過程中，評量其所使用的概念與推論是否正確，因此非選擇題解題的過程與理由，是其評分的重要依據。



圖一 數學甲非選擇題第一題成績分佈圖

第二題題目：

傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為 10 公分時其體積最大。

- (1) (2 分) 試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？
- (2) (6 分) 試求定海神針原來的長度。
- (3) (5 分) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

本題主要評量考生多項式圖形的最大、最小值的相關概念，且以「孫悟空」的「如意金箍棒」為情境來加以包裝，整題字數為 207 個字。因此考生解題時，須先讀懂題意，找出所需要的數學元素，並利用所學過相關數學知識解題。拆開本題的包裝，可發現此題與坊間常見的微分試題類似，不同點在於試題內提供最大值所在的位置，請考生算出原長應該是多少。第一至第三小題的試題設計與上題類似，是採引導的方式逐步協助考生解題。第一小題直接問神針什麼時候體積最大，考生只要讀懂試題內有關「底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短」以及「已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止」，寫出正確的底圓半徑與時間的關係式，即可得出 2 秒時，體積 V 最大。表五為抽樣生的作答情形。考生不是完全做對，就是不知如何下手作答。完全放棄的考生約一成，約七成的考生能完全作對。

表五 第二大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	192	13.6
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	112	7.9
直接寫答案，無說明。	263	18.5
答案正確，但式子過於簡略，如： $12-10=2$ 。	119	8.4
完全正確。	626	44

第二小題則是求定海神針原來的長度。解題時，可利用微分、亦可利用算術平均大於等於幾何平均（以下簡稱算幾不等式）的方法。表六列出抽樣生此題的作答情形。與上題的結果相反，約七成的考生不知如何下手求解。本題的正確寫法應先說明底圓半徑從12公分縮到4公分，可得時間 t 的範圍介於0至8秒，因此當 $t=2$ 時有最大值，所以 $V'(2)=0$ ，然後再利用微分或是算幾不等式作答。從表六可看出多半會作答的考生，僅能寫出體積 V 的關係式，接下來不知如何往下進行。有些考生能寫出正確的體積公式，亦會利用微分法求極大值，而且知道利用 $V'(2)=0$ ，但是並未說明當 $t=2$ 時有極大值，所以 $V'(2)=0$ 。從表中，亦可看出能完全作對的考生不到4%。

表六 第二大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	618	43.4
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	403	28.3
未列過程，或隨便亂寫不知所云，但答案正確。	21	1.5
體積之表示，列式錯誤。	34	2.4
體積之表示，列式正確。但未進一步處理，或後續處理錯誤。	77	5.4
體積之表示，列式正確。以微分法處理時，微分錯誤。	27	1.9
體積之表示，列式正確。以微分法處理時，微分正確，但最終處理錯誤，如 $V'(2)$ 代入錯誤，或解 $V'(2)=0$ 錯誤。	26	1.8
體積之表示，列式正確。以微分法處理時，微分正確，且由解 $V'(2)=0$ 得出答案，但未說明當 $t=2$ 時有極大值，微分為0，故 $V'(2)=0$ 。	53	3.7
體積之表示，列式正確。以算幾不等式處理時，不等式列式錯誤。	10	0.7
其他錯誤。	3	0.2
完全正確1。以微分方式求得，也提到當 $t=2$ 時有極大值，故 $V'(2)=0$ 。	45	3.2
完全正確2。以算幾不等式方式求得。	2	0.1

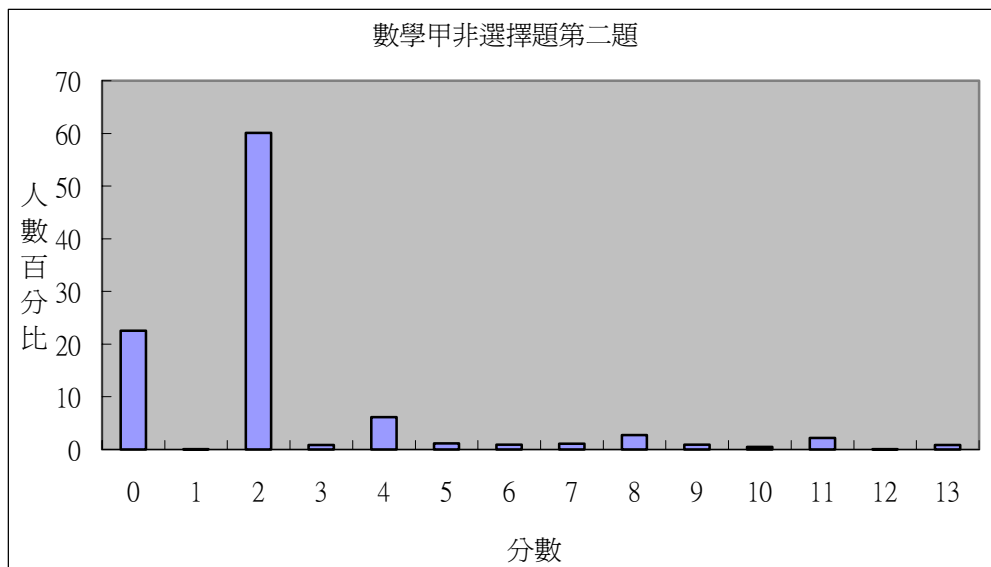
前兩小題都圍繞體積的極大值的想法解題。第三小題則是請問體積最小時，金箍棒的長度。本題的解法需先說明最小值發生在端點的位置，這可利用圖形或是微分等方法，再比較兩端點的體積值，最後才求出正確答案為當 $t=2$ 時，體積最小，此時的長度為220公分。表七是抽樣生的作答情形。約六成的考生連寫都不願意寫，直接放棄；約一成的考生是直接猜答。能完全作對的考生不到1%。而約1%的考生直接解 $V'(t)=0$ ，得 $t=2,12$ ，認為 $t=12$ 時體積最小。這些考生不是不會，而是忽略了需先考慮 t 的範圍。事實上，第二小題求解時，就必須先考量 t 的範圍，不過多半考生作答時，直接認為極值就是發生在一次導數等於零，而忽略了有範圍限制的多項式函數，其最大、最小值

可以發生在一次導數為零，也可以在端點的地方。另外，也有些考生最後比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 的值時，卻計算錯誤，實屬可惜。

表七 第二大題之第(3)小題考生的作答情形統計表

第(3)小題作答情形	人數	百分比
未答	919	64.6
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	210	14.8
未列過程，或隨便亂寫不知所云，但答案正確。	17	1.2
沒有任何說明，或不當說明，就直接代值求 $L(0)$ 、 $L(6)$ 、 $L(8)$ 等，答案錯誤。	51	3.6
沒有任何說明，就直接算 $L(8)$ ，且答案正確。	6	0.4
有部分說明，但不完整(如未比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 之值)，算出 $L(8)$ 得正確答案。	31	2.2
未注意 $0 \leq t \leq 8$ 之範圍，直接由微分等於 0 解出 $t = 12$ 代入，得出錯誤最小值。	13	0.9
比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 之值，未說理由，但得出正確答案。	6	0.4
比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 之值，有說明理由(如極值與端點，或遞增與遞減等)，但因計算錯誤得出錯誤答案。	26	1.8
其他錯誤。	27	1.9
完全正確。	12	0.8

圖二列出全體考生的得分情形。約六成的考生可以得到兩分，這些考生可能可以作答第一小題，但是第二小題以後就不知如何下手。至於其他分數的考生，幾乎均在5%以下。顯示此題雖然嘗試以引導的方式協助考生作答，但是對考生解第二小題與第三小題的幫助不大，但也可能是考生對微分求最大值並不熟悉，由第二與第三小題放棄作答的考生至少有四成的情形來看，也可略見端倪。



圖二 數學甲非選擇題第二題成績分佈圖

今年兩題計算證明題，第一題評量考生能否作基本的數字運算，以及因數概念。第二題則是評量考生多項式函數的極大極小值。這兩題解題所需要的概念與技巧對高中生而言，應不陌生。但是第二題考生所反應的得分與作答結果，顯示考生對函數的概念似乎是越來越薄弱，而且也不願意下筆作答。另外，非選擇題主要評量考生是否能清楚表達解題時的推理過程，給分關鍵在於每一步的推理過程是否合理。而且試卷上也明白說明「必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分」。但是從以上考生的作答結果，發現近兩成的考生沒有任何演算過程或理由，直接寫答案，這些考生可能不曉得應該如何描述自己的解題過程，但是用文字或是數學語言表達的能力仍是高中數學教學中很重要的一環，而且也是高中生所需具備的能力之一。