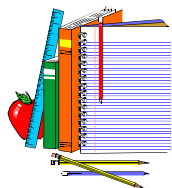


九十四學年度指定科目考試
數學甲考科選擇題參考答案

題號		答案
1		3
2		1
3		3
4		2,4
5		1,2,3
6		1,2,4
7		1,3
8		2,3,4
9		2,4
A	10	1
	11	5
B	12	3
	13	5



94年度指定科目考試非選擇題評分標準說明

數學甲、數學乙

■朱惠文

編按：94年度指定科目考試非選擇題評分標準說明系列已刊出國文、英文、物理、化學、生物等五考科，本期繼續對數學甲與數學乙的評分原則提出說明，並提供各大題解題過程與參考答案供各界參考。另，本文所引解答過程只是可能得滿分情況之一，非唯一標準。

94年指定科目考試數學甲與數學乙的題型分為選擇題、選填題與計算證明題。選擇題的目的在於評量考生是否能判斷每個選項是否正確；考生可用不同的方式進行判斷。選填題的目的在於評量考生是否能主動算出正確答案，給分的關鍵在於答案是否正確；非選擇題主要評量考生是否能清楚表達解題時的推理過程，給分關鍵在於每一步推理過程是否合理。所以對於計算證明題，考生須用數學語言表達解題過程，也因為如此，可從考生的作答過程，發現其錯誤的觀念與做法。以下將從94指考數學甲與數學乙計算證明題的得分與抽樣卷考生的作答兩方面，探討非選擇題的難易度與學生的錯誤觀念。

數學甲

表一列出91至94年非選擇題得零分的考生人數與人數百分比。除92年因為SARS取消非選擇題以外，今年非選擇題零分的人數是最少的。表示學生對今年的非選擇題多半能下筆作答，尤其是第一題，只需機率的觀念即可。

表一 91至94年數學甲非選擇題零分統計表

年度	人數	百分比
91	11585	22%
92	無	
93	19211	33%
94	3910	7%

第一題題目：

袋中有三個一樣大小的球，分別標示10分、20分、30分。重複自袋中取出一球後放回，記錄得分並累加，其中取出各球之機率皆相等。

1. 求抽三次後總分為60分的機率。
2. 遊戲「過三十」的規則是重複抽球，直到總得分大於或等於30分後停止，總得分恰為30分者輸，超過30分者贏。求贏得此遊戲之機率。

第一小題的正確做法可分為兩部分，一是正確寫出總分為60分的所有情形，考生可以樹狀圖或是列表方式解答，第二部分是正確算出各情形的機率值。多數考生可以列出總分為60分的情形，但是列不完整，可是機率的觀念正確。我們抽樣714名考生的答案卷，將其作答分析歸納如表二，統計結果呈現不知如何下手以及完全正確的考生均約

$\frac{1}{3}$ 。



第二小題提供「過三十」的遊戲規則，請考生算出贏得此遊戲的機率。做法與第一題相似。第一步是正確寫出贏或輸的情形，第二步則是正確算出贏的情形之機率值。多半考生錯誤的原因，除了無法完整列出所有贏的情形外，考生可能是沒讀懂「過三十」的遊戲規

則，或是沒注意，仍是以第一小題總分為60分的情形解答。將第一小題同樣樣本考生的作答情形分析歸納如表三。由統計圖表可知完全不知如何下手的考生較第一小題多，將近 $\frac{1}{2}$ 。能夠完全正確的考生約 $\frac{1}{5}$ 。

表二 第一小題學生的作答情形統計表

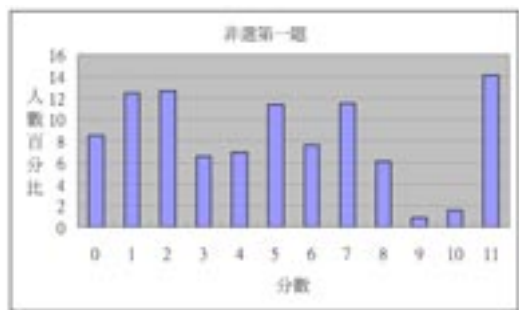
作答情形	人數	百分比
未答、完全不知如何下手、或是只有錯誤答案，沒有說明理由。 例如列出 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ 。	207	29%
可列出總分為60分的所有情形，但是未算機率或是機率值計算錯誤。 例如把 (20, 20, 20) 算成 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3! = \frac{6}{27}$ 。	21	3%
可列出總分為60分的所有情形，但是每種情形的機率值計算正確。 例如只列出一種60分情形或是全部得分情形少於27種。	212	30%
列出總分為60分情形，但是機率值計算錯誤。	9	1%
未列出60分或是全部得分情形，但是列出機率算式以及機率值，而且所算的機率值正確。	21	3%
完整列出所有可能情形，而且機率計算正確。	228	32%

表三 第二小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答、完全不知如何下手、或是只有錯誤答案，不知所列式子是何用意，例如僅列出 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ ， $1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ 。	337	47%
僅列出得分大於或等於30分的部分情形（包含輸或贏），未算機率，或是機率值算錯，例如仍依照第一小題得分六十分的情形規則計算第二小題。	57	8%
可列出贏或輸的所有情形，但是機率值計算錯誤。	68	10%
可列出贏或輸，但是機率觀念錯誤。	78	11%
未列出可能贏或輸的情形，但是列出機率算式以及機率值，而且所列的機率正確。	19	3%
完全正確。	135	19%



圖一為全體考生本題得分情形，零分的考生約8%，較往年來得少。多數考生集中於1分至8分，顯示考生雖不能完全作對，但是對於第一小題多能下筆作答，且過程正確，得到部分分數。本題若要完全正確，需具備分析歸納的能力，依照題意列出所有可能情形，以及計算機率的能力。這些能力可在修習數學過程中，逐步培養與加強的。



圖一 第一題成績分佈圖

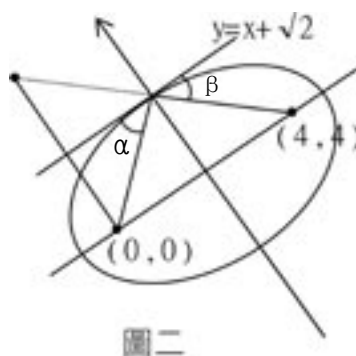
第二題題目：

平面上有一橢圓，已知其焦點為 $(0,0)$ 和 $(4,4)$ ，且 $y=x+\sqrt{2}$ 為此橢圓的切線。

1. 求此橢圓的半長軸長。
2. 設此橢圓方程式為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1$ ，求 A 、 B 、 C 、 D 、 E 之值。

第一小題的正確答案為3，第二小題的正確答案為 $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 4x - 4y = 1$ 。本題是評量橢圓的性質，切線的特性與距離概念等。本題的做法相當多元化。以第一小題為例，高中生可採取的做法約有下列三種：

- (1) 說明切線與長軸平行，推得焦點或中心到切線的距離等於半短軸長，進而求得半長軸長。



圖二

- (2) 利用橢圓的光學性質：橢圓的任意切線與過切點到兩焦點的連線所夾角度相等（如圖二），求得焦點對切線的對稱點坐標，則對稱點到另一焦點的距離即為長軸長。

- (3) 假設橢圓方程式為

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 2a,$$

將切線代入該方程式，因為切線與橢圓方程式交於一點，所以判別式等於零，解出 a 。

考生多半是採取第一種做法作答，但是，有些考生因點到直線距離公式記錯；或將短軸誤以為是長軸，實屬可惜。表四為歸納整理與第一題相同樣本考生的作答情形。將近 $\frac{1}{2}$ 的考生不知如何下手。可能是因為試題內所給橢圓非標準型，考生的第一反應覺得應該採旋轉平移做法，但是考生對其代數運算並不熟悉，而放棄作答。事實上，本題僅需要「橢圓的基本定義對標準型與非標準型橢圓均符合」的觀念，即可解答。

第二小題則是請考生直接寫出橢圓方程式。正確做法是引用第一小題所求出的半長



軸長，利用「橢圓上任一點到兩焦點距離和等於長軸長」，即可寫出：

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = 6, \text{ 化簡可得：}$$

$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 4x - 4y = 1$ 。另一個做法是從旋轉平移著手，但是解題步驟較多，而且計算比較

繁雜。將抽樣考生的答案卷作答情形歸納如表五。約七成的考生不知如何下手作答。能夠完全作對的只有4%，其中用旋轉平移完全作對的考生只有兩位。

表四 第一小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答或是完全不知如何下手。	387	54%
看出長軸與切線平行，之後卻不知如何作答。	10	1%
算出焦距，利用焦點或是中心點到切線的距離算出短軸，再算出長軸，但是計算錯誤。	41	6%
利用橢圓切線公式求解，但是不知如何求解。	21	3%
利用橢圓定義算出 $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = 2a$ 。	35	5%
沒有說明長軸與切線平行，直接得出中心點與切點的距離為短軸。	7	1%
完全正確。	193	27%

表五 第二小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答、完全不知如何下手、或是橢圓定義不清楚。	504	71%
利用橢圓定義，寫出 $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = 2a$ ，或是 $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$ ，但是未再計算，或是計算過程錯誤。	36	5%
寫出橢圓標準式，再利用平移旋轉求解，但是過程有錯。例如一開始橢圓標準式就寫錯，寫成 $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$ 。	50	7%
寫出橢圓標準式，再利用旋轉平移求解，但是過程有錯。例如利用 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ ，旋轉得 $\frac{(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2}{9} + \frac{(\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2}{1} = 1$ ，但是忘記平移或是平移錯誤。	43	6%
一開始橢圓標準式就寫錯，但是沒有利用平移或旋轉，直接展開。	46	6%
完全正確。	29	4%