大學入學考試中心
九十六學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 I 題共 9 題

作答方式：•用 2B 鉛筆在「答案卡」上劃記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液

• 答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

（一）填答選擇題時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到−，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3□ 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 1□ 與 3□ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

（二）選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑱}}{\text{⑲}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3□ 與第 19 列的 8□ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑳㉑}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 −□ 與第 21 列的 7□ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的對數值與參考數值

第一部分：選擇題（佔 55 分）

壹、單選題（佔 25 分）

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 設 $f(x)=ax^6-bx^4+3x-\sqrt{2}$，其中 a, b 爲非零實數，則 $f(5)-f(-5)$ 之值爲
   (1) -30　(2) 0　(3) $2\sqrt{2}$　(4) 30　(5) 無法確定(與 a, b 有關)

2. 試問共有多少個正整數 n 使得坐標平面上通過點 $A(-n,\ 0)$ 與點 $B(0, 2)$的直線亦通過點 $P(7,\ k)$，其中 k 爲某一正整數？
   (1) 2 個
   (2) 4 個
   (3) 6 個
   (4) 8 個
   (5) 無窮多個

3. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數爲 $f(t)=-t^2+10t+11$，其中$1\le t\le 10$，則這段時間內該地區的最大溫差爲
   (1) 9　(2) 16　(3) 20　(4) 25　(5) 36

4. 坐標平面上方程式$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的圖形與$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的圖形共有幾個交點？
   (1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 0 個

5. 關於坐標平面上函數 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\dfrac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？

(1) 交點的個數是無窮多
(2) 交點的個數是奇數且大於 20
(3) 交點的個數是奇數且小於 20
(4) 交點的個數是偶數且大於或等於 20
(5) 交點的個數是偶數且小於 20

貳、多選題（佔 30 分）

說明：第 6 至 11 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

6. 若 $\Gamma=\{z|\ z$為複數且$|z-1|=1\}$ ，則下列哪些點會落在圖形 $\Omega=\{w\ |\ w=iz,\ z\in\Gamma\}$ 上?

(1) $2i$　　(2) $-2i$　　(3) $1+i$　　(4) $1-i$　　(5) $-1+i$

7. 坐標平面上有相異兩點 P 、 Q ，其中 P 點坐標為 (s,t) 。已知線段 $\overline{PQ}$ 的中垂線 L 的方程式為 $3x-4y=0$ ，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $(3,-4)$ 平行

(2) 線段 $\overline{PQ}$ 的長度等於 $\dfrac{|6s-8t|}{5}$

(3) Q 點坐標為 (t,s)

(4) 過 Q 點與直線 L 平行之直線必過點 $(-s,-t)$

(5) 以 O 表示原點，則向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的內積必為 0

8. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ？

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. 坐標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑爲 1 的球兩兩相切，設其球心分別爲 A,B,C 。今將第四個半徑爲 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心爲 P ，試問下列哪些選項是正確的？
(1) 點 A,B,C 所在的平面和 xy 平面平行
(2) 三角形 ABC 是一個正三角形
(3) 三角形 PAB 有一邊長爲 $\sqrt{2}$
(4) 點 P 到直線 AB 的距離爲 $\sqrt{3}$
(5) 點 P 到 xy 平面的距離爲 $1+\sqrt{3}$

10. 設 a 爲大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)= a^x$ 與 $g(x)= \log_a x$ ，試問下列哪些選項是正確的？
(1) 若 $f(3)=6$，則 $g(36)=6$
(2) $\dfrac{f(238)}{f(219)}=\dfrac{f(38)}{f(19)}$
(3) $g(238)-g(219)= g(38)-g(19)$
(4) 若 P, Q 爲 $y=g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必爲正數
(5) 若直線 $y=5x$ 與 $y= f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形也有兩個交點

11. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1，已知 $f(1)=1, f(2)=2, f(5)=5$ ，則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？

(1) $(-\infty, 0)$　(2) $(0, 1)$　(3) $(1, 2)$　(4) $(2, 5)$　(5) $(5, \infty)$

第二部分：選填題（佔 45 分）

說明：1.第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (12–41)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=\dfrac{⑫}{⑬}$。(化成最簡分數)

B. 在坐標平面上的 ΔABC 中，P 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，Q 在 $\overline{AC}$ 邊上且 $\overline{AQ}=2\overline{QC}$ 。已知 $\overrightarrow{PA}=(4, 3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1, 5)$，則 $\overrightarrow{BC}=($ ⑭⑮ , ⑯⑰ $)$。

C. 在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將 15 位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過 15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲 15 位評審的平均成績為 76 分，其中有三位評審給的成績 92、45、55 應剔除，則這個參賽者的比賽成績為 ⑱⑲ 分。

D. 某巨蛋球場 E 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位。小明坐在正中間那一排(即第 13 排)，發現此排共有 64 個座位，則此球場 E 區共有 ⑳㉑㉒㉓ 個座位。

E. 設 P, A, B 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓上三點，其中 P 點坐標為$(1, 0)$，A 點坐標為$(\frac{-12}{13}, \frac{5}{13})$，且 $\angle APB$ 為直角，則 B 點坐標為 ($\frac{㉔㉕}{㉖㉗}$, $\frac{㉘㉙}{㉚㉛}$)。(化成最簡分數)

F. 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有 ㉜㉝ 種不同款式的「阿民」公仔。

G. 摸彩箱裝有若干編號爲$1,2,\cdots,10$的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案爲當摸得彩球的號數爲 k 時，其所獲報酬同爲 k；乙案爲當摸得彩球的號數爲 k 時，其所獲報酬爲 $11-k$ ($k=1,2,\cdots,10$)。已知依甲案每摸取一球的期望值爲$\frac{67}{14}$，則依乙案每摸取一球的期望值爲 $\frac{㉞㉟}{㊱㊲}$ 。(化成最簡分數)

H. 坐標平面上有一以點 $V(0, 3)$爲頂點、$F(0, 6)$爲焦點的拋物線。設 $P(a, b)$爲此拋物線上一點，$Q(a, 0)$爲 P 在 x 軸上的投影，滿足 $\angle FPQ=60^0$ ，則 $b=$ ㊳㊴ 。

I. 在ΔABC 中，M 爲 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=3$ ，$\overline{AC}=5$ ，且 $\angle BAC=120^0$ ，
則 $\tan\angle BAM=$ ㊵$\sqrt{㊶}$ 。(化成最簡根式)

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上兩點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 間的距離爲 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3. 通過 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $x_2\neq x_1$.

4. 等比數列 $\langle ar^{k-1}\rangle$ 的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$, $r\neq 1$.

5. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

6. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

7. 棣美弗定理: 設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，$n$ 爲一正整數

8. 算術平均數：$M(=\overline{X})=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$

   (樣本)標準差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}((\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)-n\overline{X}^2)}$

9. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$；$\sqrt{3}\approx 1.732$；$\sqrt{5}\approx 2.236$；$\sqrt{6}\approx 2.449$；$\pi\approx 3.142$

10. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$, $\log_{10}3\approx 0.4771$, $\log_{10}5\approx 0.6990$, $\log_{10}7\approx 0.8451$