

115 學年度學科能力測驗
數學 B 考科選擇（填）題答案

題號	答案	題號		答案	題號	答案
1	4	13	13-1	1	18	1
2	5		13-2	4	19	／
3	2	14	14-1	9	20	／
4	3		14-2	6		
5	3	15	15-1	1		
6	1		15-2	3		
7	2		15-3	5		
8	3,5		15-4	1		
9	2,4		15-5	2		
10	1,4	16	16-1	4		
11	2,5		16-2	3		
12	1,3,4	17	17-1	2		
			17-2	3		
			17-3	5		

※答案「／」者，表示該題為非選擇題。

115 學年度學科能力測驗

數學 B 考科

非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 B 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與常見錯誤概念或解法，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 351 期《選才電子報》。

115 學年度學科能力測驗數學 B 考科非選擇題各題的參考答案說明如下。

第 19 題

一、滿分參考答案：

設 $O(0,0)$ 、 $A(8,0)$ 、線段 $\overline{OA}$ 中點為 $B(4,0)$ 。

【法一】

因為 $\overline{PO} = \overline{PA}$ 且 $\angle OPA = 90^\circ$ ，所以 $\triangle OPA$ 是等腰直角三角形。

由題意知直線 OA 為 x 軸，得直線 PA 的斜率為 1，即直線 PA 為 L 。

因 B 為 $\overline{OA}$ 中點，得 $\overline{OB} = 4$ ，故 $\triangle OBP$ 亦為等腰直角三角形，因此圓心坐標為 $P(4, -4)$ 。

又 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ，得圓方程式為 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 32$ 。

【法二】

因為圓心 P 在直線 $x=4$ 上，令 P 的坐標為 $(4,a)$ ，其中 $a < 0$ 。

由 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PO} = (4, -a) \cdot (-4, -a) = 0$ ，解得 $a = -4$ ，故圓心坐標為 $P(4, -4)$ 。

又 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ，得圓方程式為 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 32$ 。

計算直線 PA 的斜率為 $\frac{0-(-4)}{8-4} = 1$ ，故直線 PA 即為 L 。

【法三】

因為 L 的斜率為 1 且通過 $A(8,0)$ ，得 L 的方程式為 $y = x - 8$ 。

由 $\begin{cases} x = 4 \\ y = x - 8 \end{cases}$ ，解得交點坐標為 $P'(4, -4)$ 。

因 $\angle OPA = 90^\circ$ ，且點 P 落在 $\overline{OA}$ 的中垂線 $x=4$ 上，故直線 PA 與直線 $x=4$ 的夾角為 45° ，即直線 PA 的斜率為 1，得圓心 $P = P'$ 。

由圓心坐標 $P(4, -4)$ ，得 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ，故圓方程式為 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 32$ 。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1. 根據題意條件，正確說明點 P 在 L 上。
2. 根據題意條件，得甲星軌跡所在圓方程式為 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 32$ ，且過程正確。

部分給分

以上解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 20 題

一、滿分參考答案：

【法一】

圓心 P 的坐標為 $(4, -4)$ ，得 $\overrightarrow{PQ} = (2 - 4, 8 - (-4)) = (-2, 12)$ 。

因為 $\overrightarrow{PR}$ 和 $\overrightarrow{PQ}$ 垂直，且長度相等，故 $\overrightarrow{PR} = (-12, -2)$ 或 $(12, 2)$ 。

由 $\overrightarrow{PR}$ 是 $\overrightarrow{PQ}$ 逆時鐘旋轉 90° 所得出的向量，故 $\overrightarrow{PR} = (-12, -2)$ 。

因此點 R 的坐標為 $(4, -4) + (-12, -2) = (-8, -6)$ 。

【法二】

因為直線 PQ 之斜率 $m_{PQ} = \frac{8 - (-4)}{2 - 4} = -6$ ，且 $\overline{PQ}$ 垂直 $\overline{PR}$ ，所以直線 PR 之斜

率 $m_{PR} = \frac{1}{6}$ ，得直線 PR 方程式為 $y + 4 = \frac{1}{6}(x - 4)$ 。

由於 R 落在直線 PR 上，可設 R 坐標為 $(t, \frac{1}{6}(t - 4) - 4)$ 。圓心 P 的坐標為 $(4, -4)$ ，

根據題意 $\overline{PQ} = \sqrt{148}$ ，再由 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 得 $\sqrt{(t - 4)^2 + (\frac{1}{6}(t - 4))^2} = \sqrt{148}$ ，

解得 $t = 16$ 或 -8 (由題意知 $t = 16$ 不合)。以 $t = -8$ 代入，得 R 坐標為 $(-8, \frac{1}{6}(-8 - 4) - 4)$

$= (-8, -6)$ ，因此 $\overrightarrow{PR} = (-8 - 4, -6 - (-4)) = (-12, -2)$ 。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1. 根據題意條件，得向量 $\overrightarrow{PR} = (-12, -2)$ ，且過程正確。
2. 根據題意條件，得點 R 的坐標為 $R(-8, -6)$ ，且過程正確。

部分給分

以上解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。