

112 學年度學科能力測驗
數學 A 考科選擇（填）題答案

題號	答案	題號	題號	答案	題號	答案
1	4	13	13-1	8	18	4
2	5		13-2	0	19	/
3	4	14	14-1	3	20	/
4	1		14-2	—		
5	2		14-3	9		
6	3	15	15-1	3		
7	3,5		15-2	4		
8	1,4	16	16-1	2		
9	3,5		16-2	2		
10	1,3,5	17	17-1	5		
11	2,5		17-2	2		
12	1,5					

※ 答案「/」者，表示該題為非選擇題。

112 學年度學科能力測驗數學 A 考科 非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 A 的題型有選擇(填)與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與部分學生作答情形，請參閱本中心將於 4 月 17 日出刊的第 336 期《選才電子報》。112 學年度學科能力測驗數學 A 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

第 19 題

一、滿分參考答案：

【法一】

由 $\overline{AP} = \overline{OA} = 1$ 以及 $\angle AOP = \theta$ 得 $\angle APO = \theta$ ，因此 $\angle OAP = \pi - 2\theta$ 。

另一方面由 $\overline{BQ} = \overline{OB}$ 以及 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ 得 $\angle QOB = \angle OQB = \frac{\pi}{2} - \theta$ ，因此 $\angle OBQ = 2\theta$ 。

由 $\angle OAP + \angle OBQ = \pi$ ，得證 \overrightarrow{AP} 與 \overrightarrow{BQ} 平行且同向。再加上 $\overline{BQ} = 2 = 2\overline{AP}$ ，

得證 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。

又因 \overrightarrow{BQ} 和 x 軸正向夾角為 2θ ，以及 $\overline{BQ} = 2$ 得 $\overrightarrow{BQ} = 2(\cos 2\theta, \sin 2\theta) = (\frac{14}{25}, \frac{48}{25})$ 。

因 B 點坐標為 $(-2, 0)$ ，得 Q 點坐標為 $(-2, 0) + (\frac{14}{25}, \frac{48}{25}) = (-\frac{36}{25}, \frac{48}{25})$ 。

【法二】

由題設 $\angle AOP = \theta$ 且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，得直線 \overline{OP} 斜率為 $\frac{3}{4}$ 。設 P 點坐標為 $(4t, 3t)$ ，

由 $\overline{AP}^2 = (4t - 1)^2 + (3t)^2 = 1$ 解得 $t = \frac{8}{25}$ ，故 P 點坐標為 $(\frac{32}{25}, \frac{24}{25})$ 。

又依題設 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ ，知直線 \overline{OQ} 斜率為 $-\frac{4}{3}$ 。設 Q 點坐標為 $(-3t, 4t)$ ，

由 $\overline{BQ}^2 = (3t - 2)^2 + (4t)^2 = 4$ 解得 $t = \frac{12}{25}$ ，故 Q 點坐標為 $(-\frac{36}{25}, \frac{48}{25})$ 。

根據上述，因為 $\overrightarrow{BQ} = (-\frac{36}{25}, \frac{48}{25}) - (-2, 0) = (\frac{14}{25}, \frac{48}{25})$ ， $\overrightarrow{AP} = (\frac{32}{25}, \frac{24}{25}) - (1, 0) = (\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ ，

得證 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。

【法三】

因 $\triangle POA$ 為腰長為 1 底角為 θ 的等腰三角形，故 $\overline{OP} = 2\cos\theta = \frac{8}{5}$ 。因此得點 P 極坐標為 $[\frac{8}{5}, \theta]$ ，即點 P 坐標為 $\frac{8}{5}(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = (\frac{32}{25}, \frac{24}{25})$ 。又依題設 $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ ，知 $\triangle QOB$ 為腰長為 2 底角為 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 的等腰三角形，故 $\overline{OQ} = 2 \times 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{12}{5}$ 。因此得點 Q 極坐標為 $[\frac{12}{5}, \frac{\pi}{2} + \theta]$ ，

即點 Q 坐標為 $\frac{12}{5}(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}) = (\frac{-36}{25}, \frac{48}{25})$ 。

根據上述，因為 $\overrightarrow{BQ} = (\frac{-36}{25}, \frac{48}{25}) - (-2, 0) = (\frac{14}{25}, \frac{48}{25})$ ， $\overrightarrow{AP} = (\frac{32}{25}, \frac{24}{25}) - (1, 0) = (\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ ，

得證 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。

二、評分原則：

1. 根據題意所給條件，正確推論 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ ，且理由須正確。

2. 正確解出 Q 點坐標為 $(\frac{-36}{25}, \frac{48}{25})$ ，且過程正確。

第 20 題

一、滿分參考答案：

【法一】

由 $\angle OBQ = 2\theta$ 得 A 點到 \overline{BQ} 的距離為 $\overline{AB}\sin 2\theta = 3 \times \frac{24}{25} = \frac{72}{25}$ 。

因四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP} = 1, \overline{BQ} = 2$ 的梯形，故得面積為 $\frac{3}{2} \times \frac{72}{25} = \frac{108}{25}$ 。

【法二】

直線 \overline{BQ} 的斜率為 $\tan 2\theta = \frac{24}{7}$ 且通過 $B(-2, 0)$ ，故方程式為 $y = \frac{24}{7}(x+2)$ ，

因此點 $A(1, 0)$ 到 \overline{BQ} 的距離為 $\frac{3 \times \frac{24}{7}}{\sqrt{1^2 + (\frac{24}{7})^2}} = \frac{72}{25}$ 。

因四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$ 的梯形，故得面積為 $\frac{3}{2} \times \frac{72}{25} = \frac{108}{25}$ 。

【法三】

點 Q 的 y 坐標為 $\frac{48}{25}$ ，故三角形 AQB 面積為 $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{48}{25} = \frac{72}{25}$ 。

又 $\overline{BQ}=2$ ，故 A 點到 \overline{BQ} 的距離 h 滿足 $\frac{1}{2} \times 2 \times h = \frac{72}{25}$ ，得 $h = \frac{72}{25}$ 。

因四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$ 的梯形，故得面積為 $\frac{3}{2} \times \frac{72}{25} = \frac{108}{25}$ 。

【法四】

$\triangle BOQ$ 底為 2 高為 $\frac{48}{25}$ （或底為 $\frac{12}{5}$ 高為 $\frac{8}{5}$ ），故面積為 $\frac{48}{25}$ 。

$\triangle POQ$ 為兩股分別為 $\frac{12}{5}$ 、 $\frac{8}{5}$ 的直角三角形，故面積為 $\frac{48}{25}$ 。

$\triangle AOP$ 底為 1 高為 $\frac{24}{25}$ （或底為 $\frac{8}{5}$ 高為 $\frac{3}{5}$ ），故面積為 $\frac{12}{25}$ 。

因此四邊形 $PABQ$ 的面積為 $\triangle BOQ + \triangle QOP + \triangle POA = \frac{48}{25} + \frac{48}{25} + \frac{12}{25} = \frac{108}{25}$ 。

四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$ 的梯形，

故 A 點到 \overline{BQ} 的距離 h 滿足 $\frac{3}{2} \times h = \frac{108}{25}$ ，得 $h = \frac{72}{25}$ 。

二、評分原則：

1. 正確寫出點 A 到直線 BQ 的距離為 $\frac{72}{25}$ ，且過程正確。

2. 正確寫出四邊形的面積為 $\frac{108}{25}$ ，且過程正確。